J. Rudnicki

Rachunek Różniczkowy i Całkowy

DR. JULJUSZ RUDNICKI
PROF. NADZW. POLIT. WARSZAW.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

CZĘŚĆ PIERWSZA

LICZBY NIEWYMIERNE, CIĄGI I SZEREGI

1 9 2 3

NAKŁADEM TRZASKI, EVERTA I MICHALSKIEGO
WARSZAWA, HOTEL EUROPEJSKI

CZCIONKAMI DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE

SPIS RZECZY

s

Liczby niewymierne.

Ciągi. Granica ciągu.

Zadania i Ćwiczenia.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

Liczby niewymierne. Pojęcie granicy. Ciągi. Szeregi i iloczyny nieskończone.

Liczby niewymierne.

Określenia zasadnicze.

1. Podstawą wszystkich naszych dalszych rozważań jest pojęcie liczby. Pojęcie liczby tworzy się przez kolejne uogólnienie. Najprostszym zbiorem liczb jest zbiór liczb całkowitych dodatnich, przy pomocy których tworzymy następnie liczby ułamkowe, przyczem, jak wiadomo, do utworzenia jednej liczby ułamkowej posługujemy się parą liczb całkowitych. Dzięki liczbom ułamkowym staje się możliwe z jednej strony dzielenie dwóch jakichkolwiek liczb całkowitych dodatnich, a z drugiej strony mierzenie odcinków, spółmiernych z odcinkiem jednostkowym. Odejmowanie zaś staje się działaniem zawsze możliwem, jak wiadomo, w zakresie liczb względnych, t. j. dodatnich i ujemnych, co stanowi nowe uogólnienie pojęcia liczby. Liczbom względnym odpowiadają odcinki o dwóch zwrotach przeciwnych na prostej. Tak więc każde uogólnienie pojęcia liczby pozwala nam wykonać takie działania, które nie były możliwe do wykonania przed tem uogólnieniem. Oczywiście, możliwość wykonania tych działań jest uwarunkowana ich określeniem, tak iż przy każdem nowem rozszerzeniu po-

jęcia liczby muszą być podane definicje równości i nierówności tych liczb, sumy, różnicy i t. d. Okazuje się przytem, iż zasadnicze własności działań, które są spełnione dla liczb całkowitych, zachodzą także i dla tych nowych liczb, jako to prawo przemienności, łączności, rozdzielności i t. d. Na tem właśnie polega zasada zachowania (permanence) praw formalnych. W matematyce elementarnej spotykamy mnóstwo przykładów zastosowania tej zasady. Przekształcając wzory, w których wchodzą liczby, wyrażone literami a, b, c i t. d., nie potrzebujemy się troszczyć o to, czy a, b, c są liczbami całkowitemi, czy ułamkowemi, dodatniemi czy też ujemnemi, gdyż, np. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ niezależnie od tego, jakiemi są liczby a i b.

Liczby, o których mówiliśmy dotychczas, są to liczby wymierne; zbiór liczb wymiernych tworzą liczba zero i liczby dodatnie i ujemne kształtu $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są dowolnemi liczbami całkowitemi, przytem o n możemy zawsze założyć, iż jest liczbą całkowitą dodatnią.

Nowem uogólnieniem pojęcia liczby jest liczba niewymierna.

2. Liczby niewymierne określamy przy pomocy nieskończonej liczby liczb wymiernych, (a więc przy pomocy nieskończonej liczby liczb całkowitych, gdyż każda liczba wymierna utworzona jest z dwóch liczb całkowitych). Dla wyjaśnienia możemy najprzód wykazać, w jaki sposób liczba wymierna może być określona przy pomocy nieskończonej liczby liczb wymiernych. Zauważymy przedewszystkiem, że gdy dana jest liczba wymierna w, to tem samem dane są wszystkie liczby wymierne mniejsze od w i wszystkie liczby wymierne większe od w; odwrotnie, gdy znane są wszystkie liczby wymierne większe od w i wszystkie liczby wymierne mniejsze od w, to tem samem dana jest

i liczba w. Na to, by znaną była liczba w, zresztą, nie koniecznie muszą być dane *wszystkie* liczby mniejsze od w i *wszystkie* większe od w; wystarczy, by danych było nieskończenie wiele większych od w, z tym warunkiem jeszcze, by między liczbami większemi i liczbami mniejszemi od w, były liczby, których różnica jest mniejsza od dowolnie małej liczby. Tak, np. liczbę $\frac{2}{3}$ można określić zapomocą ułamka okresowego 0,(6); należy to rozumieć w ten sposób, iż liczba określona przez 0,(6) jest większa od wszystkich liczb ciągu 0; 0,6; 0,66; 0,666; 0,6666;.... i t. d., a mniejsza od wszystkich liczb ciągu: 1: 0,7; 0,67; 0,667; 0,6667;.... i t. d. Istotnie, jedynie tylko liczba $\frac{2}{3}$ spełnia te warunki, t. j. jest jednocześnie większa od wszystkich liczb pierwszego ciągu, a mniejsza od wszystkich liczb drugiego ciągu; gdyby były dwie liczby c i c', spełniające oba te warunki, to stąd wynikałoby, iż $|c - c'| < \frac{1}{10^n}$, przytem nierówność powyższa byłaby spełniona dla każdej wartości całkowitej wykładnika n, co jest, oczywiście, możliwe tylko o ile $c \neq c'$.

3. *Przekrój.* Przekrojem nazywamy podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, z zachowaniem następujących warunków:

1⁰ Każda liczba klasy pierwszej jest mniejsza od każdej liczby klasy drugiej.

2⁰ Ani jedna klasa nie jest pusta; (klasa jest pusta, gdy nie zawiera żadnej liczby).

3⁰ Każda liczba wymierna musi należeć bądź do pierwszej bądź do drugiej klasy, t. j. obie klasy razem wzięte stanowią zbiór wszystkich liczb wymiernych; żadna liczba nie może należeć do dwóch klas jednocześnie.

Pierwszą klasę nazywamy również klasą niższą, a drugą klasę — klasą wyższą.

Dwie są możliwości:

1⁰ Między liczbami wymiernemi pierwszej klasy jest

liczba większa od wszystkich innych liczb tej klasy, albo też między liczbami wymiernemi drugiej klasy jest liczba mniejsza od wszystkich liczb tej klasy; wtedy przekrój określa tę właśnie liczbę wymierną odpowiednio największą z pośród liczb pierwszej klasy lub ewentualnie najmniejszą z pośród liczb drugiej klasy. Łatwo się przekonać, że nie może się zdarzyć, by jednocześnie była liczba największa a w pierwszej klasie, a jednocześnie była liczba najmniejsza A w drugiej. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności; gdyby bowiem takie liczby a i A istniały jednocześnie, to $a < \frac{a+A}{2} < A$, i wskutek tych nierówności liczba wymierna $\frac{a+A}{2}$ nie należałaby do żadnej z dwóch klas, co jest niemożliwe.

2^0 W pierwszej klasie niema liczby największej, ani w drugiej niema liczby najmniejszej; w tym przypadku przekrój określa liczbę niewymierną.

Istnieją przekroje obu wymienionych tylko co typów, co wykazać można na przykładach. Zaliczmy do pierwszej klasy wszystkie liczby wymierne, mniejsze od liczby wymiernej $\frac{m}{n}$, a do drugiej klasy wszystkie liczby wymierne większe od $\frac{m}{n}$; liczbę zaś $\frac{m}{n}$ zaliczymy dowolnie do klasy pierwszej lub drugiej. Oto jest przykład przekroju pierwszego rodzaju.

Damy teraz przykład przekroju drugiego rodzaju. Jeśli a i b oznaczają dwie dowolne liczby wymierne, to musi zachodzić jedna z trzech zależności: $a=b$, $a<b$, $a>b$. Podnieśmy teraz dowolną liczbę wymierną w do kwadratu i porównajmy w^2 z liczbą, dajmy na to 2. Równość tu jest wykluczona, gdyż nie istnieje, jak wiadomo, liczba

wymierna $\frac{m}{n}$, której kwadrat równałby się 2. Może więc być tylko:

$$w^2 > 2 \text{ lub } w^2 < 2.$$

Możemy podzielić teraz wszystkie liczby wymierne na dwie klasy. Do pierwszej zaliczymy wszystkie liczby ujemne, liczbę zero i liczby wymierne dodatnie, których kwadrat jest mniejszy od 2; do drugiej klasy zaliczymy wszystkie pozostałe liczby wymierne, t. j. te liczby dodatnie, których kwadrat jest większy od 2. Przekrój został więc określony, każda bowiem liczba wymierna należy do jednej z dwóch klas, żadna klasa nie jest pusta, przytem każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy. W rzeczy samej, oznaczywszy dowolną liczbę pierwszej klasy przez w_I, a dowolną liczbę drugiej klasy przez w_{II}, jeśli $w_I \leqslant 0$, ponieważ w_{II} zawsze > 0, to, oczywiście, wtedy $w_I < w_{II}$.

Pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek, gdy $w_I > 0$; ponieważ $w_I^2 < 2$, a $w_{II}^2 > 2$, więc $w_I^2 < w_{II}^2$, czyli $w_I^2 - w_{II}^2 < 0$, t. j. $(w_I - w_{II})(w_I + w_{II}) < 0$, ponieważ $w_I + w_{II} > 0$, wnioskujemy stąd, iż $w_I - w_{II} < 0$, t. j. że $w_I < w_{II}$, co było do okazania.

Stwierdziliśmy, że podany przez nas podział na dwie klasy jest przekrojem. Udowodnimy teraz, że w pierwszej klasie niema liczby największej, ani w drugiej liczby najmniejszej

Niech $a > 0$ będzie dowolną liczbą wymierną pierwszej klasy, to jest $a^2 < 2$; należy udowodnić, iż jeżeli liczba dodatnia ε jest dostatecznie mała, to i $(a + \varepsilon)^2 < 2$, t. j. $a + \varepsilon > a$ należy też do pierwszej klasy. Wystarczy w tym celu wybrać liczbę wymierną dodatnią ε, by spełniała obie nierówności: $\varepsilon < a$, $\varepsilon < \frac{2 - a^2}{3a}$. W rzeczy samej

$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 = a^2 + \varepsilon(2a+\varepsilon) < a^2 + 3a\varepsilon < a^2 +$ $+ 3a\frac{2-a^2}{3a}$, czyli $(a+\varepsilon)^2 < 2$, co było do okazania.

Tak samo udowodnimy, że i w klasie drugiej niema tu liczby najmniejszej.

Istnieją więc przekroje drugiego rodzaju.

Zbiór wszystkich liczb, określonych za pomocą przekrojów nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych. Zbiór liczb wymiernych jest, oczywiście, częścią zbioru liczb rzeczywistych. Ponieważ każdej liczbie wymiernej w odpowiadają dwa przekroje, mianowicie jeden, w którym klasa pierwsza posiada liczbę największą w i drugi przekrój, w którym klasa druga posiada liczbę najmniejszą w, to, dla uniknięcia nieporozumień, umówimy się, iż na przyszłość rozważać będziemy tylko takie przekroje, w których klasa niższa nie zawiera liczby największej.

Skoro rozszerzyliśmy nasze pierwotne pojęcie liczby, należy w odpowiedni sposób rozszerzyć pojęcia równości, nierówności, dodawania, mnożenia tych liczb i t. d. Dopóki tego nie uskutecznimy i nie okażemy, iż na mocy rozszerzonych definicji działań, wszystkie zasadnicze prawa działań nad liczbami wymiernemi są prawomocne dla nowych liczb, to samo rozszerzenie pojęcia liczby nie ma dla nas wartości.

4. *Równość i nierówność liczb rzeczywistych.*

Niech będą dane dwie liczby rzeczywiste α i β Liczbie α odpowiada przekrój, w którym dowolną liczbą klasy niższej oznaczymy przez a, zaś dowolną liczbę klasy wyższej przez A; same zaś klasy przez (a) i (A), tak iż (a), nprz., oznacza zbiór wszystkich liczb a, (A) zaś oznacza zbiór wszystkich liczb A. Liczbę β wyznacza przekrój, w którym dowolną liczbą klasy niższej niech będzie b, a dowolną liczbą klasy wyższej B; same zaś klasy (b) i (B). Może się zdarzyć, że oba przekroje są identyczne, t. j. $(a) = (b)$,

a w takim razie i $(A) = (B)$, t. j. zbiór wszystkich liczb a jest identyczny ze zbiorem wszystkich liczb b, a zbiór wszystkich liczb A jest identyczny ze zbiorem wszystkich liczb B. W takim razie powiemy, że liczba rzeczywista α równa się liczbie rzeczywistej β i napiszemy $\alpha = \beta$. Gdy przekroje nie są identyczne, to $\alpha \neq \beta$; to znaczy, iż nie każde a jest zarazem b, lub że nie każde A jest B; możemy więc odróżnić dwa przypadki: 1^0 każda liczba klasy (a) należy do klasy (b), w takim razie powiemy, iż $\alpha < \beta$; 2^0 każda liczba A klasy (A) należy do klasy (B), w takim razie powiemy, iż $\alpha > \beta$.

Przykład: niech α będzie liczbą wyznaczoną przez przekrój, w którym do klasy wyższej należą liczby dodatnie wymierne A, których kwadrat jest większy od 3, a do klasy niższej należą pozostałe liczby wymierne a; dalej niech β będzie liczbą, wyznaczoną przez przekrój, w którym do klasy wyiższej należą liczby dodatnie wymierne B, których kwadrat jest większy od 5, a do klasy niższej pozostałe liczby wymierne b; w takim razie $\alpha < \beta$, ponieważ każda liczba wymierna, dodatnia, której kwadrat jest mniejszy od 3, podniesiona do kwadratu da liczbę, mniejszą od 5.

Jeśli liczby α i β są wymiernemi, to podane tylko co określenia równości i nierówności przy pomocy przekrojów wyrażają to samo, co elementarne określenia równości i nierówności w teorji liczb wymiernych; innemi słowy, to co jest określeniem w przypadku liczb niewymiernych jest twierdzeniem łatwem do udowodnienia w przypadku, gdy α i β są liczbami wymiernemi.

Z podanych tylko co określeń wynika, oczywiście, że każda liczba α, wyznaczona przez przekrój, jest większa od każdej liczby a klasy niższej tego przekroju; przytem, jeśli α jest liczbą niewymierną, to jest także mniejsza od każdej liczby A klasy wyższej tego przekroju, jeżeli zaś jest

liczbą wymierną, to równa się najmniejszej liczbie klasy (A), a więc jest mniejsza od wszystkich pozostałych.

Liczba α jest dodatnia, jeżeli niższa klasa (a) zawiera choć jedną liczbę wymierną dodatnią, (zawiera ich wtedy nieskończenie wiele). Liczba α jest ujemna, jeśli jej klasa wyższa (B) zawiera choć jedną liczbę wymierną ujemną. Liczba α jest zero, jeśli jej klasa niższa (a) nie zawiera ani jednej liczby dodatniej, a klasa wyższa (A) ani jednej liczby ujemnej.

5. *Liczby przeciwne (symetryczne) i odwrotne.*

Przypuśćmy, iż liczba α jest wyznaczona przez przekrój, w którym klasą niższą jest (a), a klasą wyższą jest (A). Tworzymy nowy przekrój, zaliczając do klasy niższej wszystkie liczby $-A$, a do klasy wyższej wszystkie liczby $-a$; (dlaczego ten podział na dwie klasy jest przekrojem?). W ten sposób utworzony przekrój wyznacza pewną liczbę β. Łatwo sprawdzić, iż, jeśli α jest liczbą dodatnią, to β jest liczbą ujemną i odwrotnie, jeśli zaś α jest zerem, to i β jest zerem. Takie dwie liczby nazywać będziemy przeciwnemi (lub symetrycznemi), co wyrazimy, pisząc, że $\beta = -\alpha$. Każda liczba ma swoją przeciwną; jedna tylko liczba zero równa się swojej przeciwnej (dlaczego?). Jeżeli α nie jest zero, to z dwóch liczb α i $-\alpha$ jedna jest dodatnia; tę która jest dodatnia, nazywamy wartością bezwzględną lub modułem liczby α i oznaczać będziemy przez $|\alpha|$; jeśli $\alpha = 0$, to $|\alpha|$ oznaczać będzie zero; liczby α i $-\alpha$ mają więc zawsze tę samą wartość bezwzględną. Zauważmy, iż, jeśli postąpimy z liczbą $-\alpha$, tak jak z liczbą α, to okaże się, iż liczbą przeciwną do $-\alpha$ jest liczba α, co dowodzi, że $-(-\alpha) = \alpha$.

Niech będzie $\alpha > 0$, określona przez przekrój, w którym a i A mają to samo znaczenie, co poprzednio; utwórzmy nowy przekrój, w którym do klasy niższej zaliczymy wszystkie liczby wymierne ujemne, liczbę zero i wszystkie

liczby kształtu $\frac{1}{A}$; do klasy wyższej zaliczymy wszystkie pozostałe liczby wymierne, które, oczywiście wszystkie są dodatnie. Liczbę β wyznaczoną przez ten drugi przekrój nazywamy odwrotnością liczby α i oznaczamy przez $\frac{1}{\alpha}$. Jeśli teraz $\alpha < 0$, to $\frac{1}{\alpha}$ określamy jako liczbę przeciwną względem odwrotności liczby $-\alpha$, czyli $\frac{1}{\alpha}$ będzie wtedy oznaczać liczbę $-\frac{1}{-\alpha}$, (gdzie $-\alpha > 0$). Jeśli wreszcie $\alpha = 0$, to odwrotowości $\frac{1}{\alpha}$ nie dajemy żadnego określenia, t. j. $\frac{1}{\alpha}$ dla $\alpha = 0$ jest wyrażeniem, pozbawionem sensu.

6. Między dwoma liczbami w_1 i w_2, przyczem, np., $w_1 < w_2$, istnieje nieskończenie wiele liczb niewymiernych. W rzeczy samej, wystarczy określić liczbę α zapomocą przekroju, w którym do klasy niższej (a) została zaliczona liczba w_1, do klasy zaś wyższej (A) liczba w_2. Można to, oczywiście, uczynić nieskończenie wielu sposobami. Jeżeli chodzi specjalnie o liczby niewymierne, to dla wyznaczenia liczby α można postąpić w sposób następujący: niech w oznacza liczbę wymierną, spełniającą warunek $w_1^2 < w < w_2^2$ i nie będącą kwadratem żadnej liczby wymiernej, (jeśli $w_1 = \frac{m}{n}$, a $w_2 = \frac{p}{q}$, gdzie $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ ułamki nieskracalne, to w równa się, np., liczbie $\frac{m^2q^2+1}{n^2q^2}$) przyczem zakładamy, iż $w_1 > 0$. Do wyższej klasy zaliczymy liczby wymierne, których kwadrat jest większy od w, a do klasy niższej wszystkie pozostałe liczby wymierne; jasna rzecz, że wtedy liczba w_1 (dodatnia) będzie należała do klasy niższej, a liczba w_2 do klasy wyższej, przyczem w klasie niższej nie będzie liczby największej,

Jeżeli teraz $w_2 < 0$, to określimy liczbę α jak poprzednio dla liczb $-w_1$ i $-w_2$, które obie są dodatnie; liczba $-\alpha$ będzie żądaną. Jeśli teraz $w_1 < 0$, a $w_2 > 0$, to zastąpimy liczbę w_1 dowolną liczbą wymierną w_1' dodatnią mniejszą od w_2 i utworzymy liczbę α dla liczb w_1' i w_2 jak poprzednio; liczba α będzie żądaną.

Jeśli $\alpha < \beta$, to istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych w większych od α, a mniejszych od β, czyli, jak często mówić będziemy, zawartych między α i β. W rzeczy samej jedna taka liczba w istnieć musi, bo inaczej oba przekroje, t. j. przekrój, określający α i przekrój, określający β, byłyby identyczne, wbrew założeniu, że $\alpha < \beta$. Tak więc jest $\alpha < w < \beta$. Liczba β jest określona przez przekrój, w którym klasa niższa jest (b); możemy więc powiedzieć, że liczba w należy do klasy (b); lecz w klasie (b) niema liczby największej, (chociażby liczba β była wymierną), czyli istnieje liczba $w' > w$, a należąca także do klasy (b); wskutek tego $\alpha < w < w' < \beta$. Między liczbami w i w' mamy nieskończenie wiele liczb wymiernych, np. $w'' = \frac{w + w'}{2}$, $w''' = \frac{w + w''}{2}$ i t. d. Wszystkie te liczby są większe od α, a mniejsze od β. Cel nasz został więc osiągnięty.

Zestawiwszy oba tylko co otrzymane wyniki, możemy powiedzieć, iż między dwoma liczbami rzeczywistemi nierównemi α i β istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych pośrednich γ, to jest spełniających nierówność $\alpha < \gamma < \beta$, jeśli, np., $\alpha < \beta$; śród tych liczb γ jest nieskończenie wiele wymiernych i nieskończenie wiele niewymiernych.

Łatwo udowodnić, iż nierówności $\alpha < \beta$ i $\beta < \gamma$ w zakresie liczb rzeczywistych, tak jak dla liczb wymiernych, pociągają za sobą nierówność $\alpha < \gamma$. W rzeczy samej, według udowodnionego poprzednio, jeśli $\alpha < \beta$, to istnieje

liczba wymierna u, spełniająca warunek $\alpha < u < \beta$; tak samo istnieje liczba wymierna v, spełniająca warunek $\beta < v < \gamma$; liczba β jest określona przez przekrój, w którym klasę niższą oznaczymy, jak zwykle, przez (b), a klasę wyższą przez (B); z tylko co napisanych nierówności wynika, iż u należy do (b), a v należy do klasy (B), jest więc $u < v$; ponieważ liczba v należy do klasy niższej przekroju, określającego liczbę γ, a $u < v$, to u należy także w tym przekroju do klasy niższej. Tak więc liczba u należy do klasy wyższej w przekroju, wyznaczającym liczbę α, a do klasy niższej w przekroju, wyznaczającym liczbę γ. Stąd wniosek, iż $\alpha < \gamma$.

7. *Wartości przybliżone liczby niewymiernej.*

Jeśli α jest liczbą niewymierną, to liczby wymierne pierwszej klasy stanowią wartości przybliżone z niedomiarem, a liczby drugiej klasy — wartości przybliżone z nadmiarem. Wartością przybliżoną liczby α z dokładnością do $\frac{p}{q}$ $\left(\text{gdzie } \frac{p}{q} \text{ jest liczbą wymierną}\right)$ z niedomiarem nazywa się największa wielokrotność ułamka $\frac{p}{q}$ mniejsza od α.

W rzeczy samej, istnieje taka liczba całkowita m, iż

$$\text{(1)} \qquad \frac{mp}{q} < \alpha < (m+1)\frac{p}{q};$$

aby się o tem przekonać, utwórzmy postęp arytmetyczny

$$\ldots, -\frac{np}{q}, \ldots\ldots, -\frac{3p}{q}, -\frac{2p}{q}, -\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \frac{3p}{q}, \ldots, n\frac{p}{q}, \ldots\ldots,$$

o różnicy $\frac{p}{q}$; wszystkie liczby tego postępu (podwójnie nieograniczonego) nie mogą należeć do jednej i tej samej klasy w przekroju, wyznaczającym liczbę α, gdyż w przeciwnym razie jedna z dwóch klas byłaby pusta. Stąd wynika, że istnieją dwie liczby kolejne w postępie, z których

poprzedzająca należy jeszcze do klasy pierwszej, a następująca należy już do klasy drugiej; otrzymujemy w ten sposób dwie kolejne liczby postępu $m\frac{p}{q}$ i $(m+1)\frac{p}{q}$, spełniające nierówność (1).

Im liczba $\frac{p}{q}$ jest mniejsza, tem, mówimy, dokładność jest większa.

Tak więc z pojęcia przekroju wynika, że można znaleźć dwie liczby należące do różnych klas, i różniące się między sobą tak mało, jak się to nam podoba.

Nadajmy liczbie $\frac{p}{q}$ szereg wartości $1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots$ gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią. Otrzymamy kolejno wartości przybliżone z dokładnością do jedności c i $c+1$, z dokładnością do $\frac{1}{n}$, mianowicie, $c+\frac{c_1}{n}$ i $c+\frac{c_1+1}{n}$, z dokładnością do $\frac{1}{n^2}$, mianowicie $c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}$ i $c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2+1}{n^2}$ i t. d., gdzie $c, c_1, c_2, \ldots$, są liczbami całkowitemi, przyczem liczby $c_1, c_2, c_3, \ldots$ i t. d. są mniejsze od liczby n, t. j. równają się jednej z liczb: $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Możemy proces tylko co opisany rozwijać do nieskończoności, o ile liczba α jest niewymierna. Otrzymamy w ten sposób dwa ciągi liczb:

$$c,\ c+\frac{c_1}{n},\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2},\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3}+, \ldots$$

$$c+1,\ c+\frac{c_1+1}{n},\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2+1}{n^2},\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3+1}{n^3}, \ldots$$

Ciągi te posiadają następujące własności: Każda liczba pierwszego ciągu jest mniejsza od liczby następującej tegoż ciągu lub conajwyżej jej równa; każda liczba drugiego ciągu jest większa od następnej lub conajmniej jej równa. Każda liczba pierwszego ciągu jest mniejsza od każdej liczby drugiego ciągu. Jakkolwiek małą jest liczba do-

datnia ε, można znaleźć takie dwie liczby (a nawet nieskończenie wiele takich par), z których większa należy do drugiego ciągu, a mniejsza należy do pierwszego ciągu i których różnica mniejsza jest od liczby ε. Wszystkie te własności wynikają bezpośrednio ze struktury (budowy) tych ciągów, a dowody, nie przedstawiające trudności, zostawiamy czytelnikowi.

Wskażemy jeszcze na następujące własności tych ciągów (zbiorów przybliżeń): niech a oznacza dowolną liczbę wymierną pierwszej klasy w przekroju, wyznaczającym liczbę α; w takim razie istnieje w pierwszym ciągu t. j. w ciągu:

$$(2) \quad c;\ c+\frac{c_1}{n};\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2};\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3};\dots;$$
$$c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\dots+\frac{c_k}{n^k};\dots$$
$$(\text{gdzie } 0 \leqslant c_k \leqslant n-1, \text{ dla } k=1, 2, 3, \dots),$$

liczba, większa od a. W rzeczy samej, ponieważ a nie jest największą liczbą klasy pierwszej (gdyż takiej niema), istnieje liczba wymierna a', większa od a, należąca także do klasy niższej; niech k oznacza liczbę całkowitą dodatnią, taką, że $\frac{1}{n^k} < a' - a$; wtedy $c+\frac{c_1}{n}+\frac{c^2}{n^2}+\dots+\frac{c_k}{n^k}+$ $+\frac{1}{n^k} > a'$, gdyż liczba po stronie lewej ostatniej nierówności należy do klasy drugiej; a więc $c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\dots$ $\dots+\frac{c_k}{n^k} > a' - \frac{1}{n^k}$; lecz z $a'-a > \frac{1}{n^k}$, wynika $a' - \frac{1}{n^k} > a$, tak iż ostatecznie $c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\dots+\frac{c_k}{n^k} > a$, co należało udowodnić.

Tak samo, jeżeli A oznacza dowolną liczbę wymierną klasy drugiej, to istnieje w ciągu:

$$(2') \qquad c+1;\ c+\frac{c_1+1}{n};\ c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2+1}{n};\ldots;$$

$$c+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n}+\ldots\ldots+\frac{c_k+1}{n^k};\ldots \text{ liczba mniejsza od } A.$$

Każda liczba wymierna α jest więc źródłem, z którego wynikają ciągi nieskończone liczb wymiernych (2) i (2′) o podanej strukturze i posiadające wyszczególnione tylko co własności. Odwrotnie, możemy a priori założyć, iż dany jest ciąg (2) lub (2′); każdy taki ciąg określa liczbę rzeczywistą α. Niech, np., dany będzie ciąg (2); utwórzmy przy jego pomocy przekrój w sposób następujący: dowolną liczbę wymierną r zaliczymy do klasy niższej lub wyższej zależnie od tego, czy w ciągu (2) istnieje czy nie istnieje liczba nie mniejsza od r, t. j. większa lub równa.

Niech α oznacza liczbę wyznaczoną przez ten przekrój. Możemy utworzyć dwa ciągi liczb wymiernych z wartości przybliżonych liczby α z dokładnością odpowiednio do 1, do $\frac{1}{n}$, do $\frac{1}{n^2}$, ... i t. d., z niedomiarem dla pierwszego ciągu, z nadmiarem dla drugiego. Czytelnik udowodni z łatwością, że te dwa ciągi, otrzymane tą drogą, są identyczne z ciągami (2) i (2′), przy pomocy których wyznaczyliśmy liczbę α.

Posługujemy się zazwyczaj układem dziesiętnym; dlatego też wybieramy często $n=10$; określamy wtedy liczbę α przy pomocy wartości przybliżonych z dokładnością do jednej dziesiątej, do jednej setnej i t. d.; powstaje wtedy rozwinięcie liczby α na ułamek dziesiętny.

Działania nad liczbami rzeczywistemi.

8. Dodawanie.

Sumą dwóch liczb rzeczywistych α i β nazywamy liczbę, którą oznaczamy przez $\alpha+\beta$ i która jest określona za pomocą dwóch następujących własności:

1^0 $\alpha + \beta$ jest liczbą rzeczywistą większą od sumy $a + b$ dwóch dowolnych liczb wymiernych a i b, mniejszych odpowiednio od składników α i β, t. j. spełniających warunek $a < \alpha$, $b < \beta$, (albo inaczej a należy do klasy niższej przekroju, wyznaczającego liczbę α, b zaś należy do klasy niższej przekroju, wyznaczającego β).

2^0 $\alpha + \beta$ jest liczbą mniejszą od sumy $A + B$ dwóch dowolnych liczb wymiernych A i B, z których $A > \alpha$, $B > \beta$, (t. j. A i B są liczbami należącemi do klas wyższych odpowiednich przekrojów).

Należy okazać, że te dwa warunki istotnie wyznaczają liczbę rzeczywistą i tylko jedną.

W tym celu zaliczmy do pierwszej klasy wszystkie liczby wymierne kształtu $a + b$, t. j. liczby wymierne, które można utworzyć dodając do siebie składniki mniejsze odpowiednio od α i mniejsze od β. Do drugiej klasy zaliczymy wszystkie liczby kształtu $A + B$, gdzie $A > \alpha$, $B > \beta$; każda liczba wymierna r mniejsza od $a + b$ jest tegoż samego typu, gdyż $r - a < b$ czyli $r - a = b'$ jest liczbą mniejszą od b, a więc i od β; $r = (r - a) + a = a + b'$. Tak samo, jeśli $R > A + B$, to $R = (R - A) + A = A + B'$, gdzie $B' = R - A > B > \beta$. Jeżeli więc istnieje jakaś liczba wymierna w, nie objęta tylko co przytoczoną klasyfikacją, to ta liczba w musi spełniać następujące nierówności.

(3) $$a + b < w < A + B,$$

przy wszystkich wartościach wymiernych a, b, A, B, spełniających nierówności $a < \alpha < A$, $b < \beta < B$; bo gdyby $w \geqslant A + B$, to należałaby do klasy wyższej. Ta liczba w spełnia więc warunek (3), który stanowi określenie sumy $\alpha + \beta$; taka liczba w może być tylko jedna, bo gdyby jakaś inna liczba w' nie należała do naszej klasyfikacji, to także mielibyśmy $a + b < w' < A + B$; ponieważ $w' \neq w$, niech więc będzie np. $w' < w$, wtedy mamy

$a + b < w' < w < A + B$, czyli $w - w' < A + B - (a + b)$,

czyli $0 < w - w' < (A - a) + (B - b)$; jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, można tak wybrać A i a, by $A - a < \frac{\varepsilon}{2}$, tak samo wybrać można B i b tak, by $B - b < \frac{\varepsilon}{2}$; w takim razie $0 < w - w' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; niech $\varepsilon \leqq w - w'$, w takim razie otrzymamy $w - w' < w - w'$ t. j. dochodzimy do sprzeczności, co dowodzi, iż nasze założenie $w \neq w'$ było fałszywe; tak więc jest $w = w'$, czyli jedna tylko liczba najwyżej może nie należeć do naszego podziału na klasy; ta liczba, o ile istnieje, jest właśnie równa sumie $\alpha + \beta$. Jeśli chcemy, by nasz podział na klasy był przekrojem, trzeba, by każda liczba wymierna należała do jednej z dwóch klas, więc o ile liczba wymierna w nie należy ani do liczb kształtu $a + b$, ani do liczb kształtu $A + B$, to my tę liczbę zaliczymy do klasy wyższej, która będzie wtedy posiadać liczbę najmniejszą; otrzymamy w ten sposób przekrój określi nam właśnie tę liczbę wymierną $w = \alpha + \beta$.

Jeżeli takiej liczby wymiernej w niema, to każda liczba wymierna należy do jednego z dwóch typów $a + b$ lub $A + B$, tak iż podział na liczby kształtu $a + b$ z jednej strony, kształtu $A + B$ z drugiej, stanowi przekrój. W klasie niższej niema wtedy liczby największej, w klasie drugiej liczby najmniejszej, bo zawsze istnieją liczby a', b', A', B', spełniające warunki $a < a' < A' < A$, $b < b' < \beta < B' < B$, tak iż $a' + b' > a + b$, $A' + B' < A + B$. Taki przekrój wyznacza liczbę niewymierną γ; ponieważ zawsze

$$a + b < \gamma < A + B,$$

więc ta liczba γ jest właśnie sumą $\alpha + \beta$; że ta liczba jest wyznaczona w sposób jednoznaczny, udowodnimy, jak poprzednio, przez sprowadzenie do sprzeczności.

Suma $\alpha+\beta$ w zakresie liczb rzeczywistych posiada te same własności zasadnicze co i suma w dziedzinie liczb wymiernych, mianowicie: $\alpha+\beta$ jest zawsze liczbą określoną jednoznacznie; $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, czyli ma miejsce prawo przemienności; $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, czyli zachodzi prawo łączności; jeżeli $\beta>\gamma$, to $\alpha+\beta>\alpha+\gamma$, czyli jest spełnione prawo monotonji; dalej $\alpha+0=\alpha$, czyli zero jest modułem dodawania.

Poprzednio (l. 5), określiliśmy liczby przeciwne czyli symetryczne α i $-\alpha$; łatwo udowodnić, że suma dwóch takich liczb równa się zeru, t. j. $\alpha+(-\alpha)=0$.

Co do prawa przemienności, zauważymy, że przekroje, określające $\alpha+\beta$ i $\beta+\alpha$ są identyczne, stąd sumy te są równe. To samo tyczy się i prawa łączności.

Dowód prawa monotonji. Niech $a<\alpha<A$; $b<\beta<B$; $c<\gamma<C$; gdzie a, b, c są liczby należące do klas niższych odpowiednich przekrojów; A, B, C należą do klas wyższych. Ponieważ $\gamma<\beta$, można tak dobrać C i b, by spełnione były nierówności $\gamma<C<b<\beta$; obierzmy następnie a i A tak, by $A-a<b-C$, co jak wiadomo, jest możliwe (l. 7); wtedy $A+C<a+b$; dalej $a+b$ należy do klasy niższej przekroju wyznaczającego liczbę $\alpha+\beta$, więc $a+b<\alpha+\beta$, podobnież $\alpha+\gamma<A+C$; ponieważ $A+C<a+b$, mamy $\alpha+\gamma<A+C<a+b<\alpha+\beta$, czyli $\alpha+\gamma<\alpha+\beta$; co trzeba było udowodnić.

Udowodnimy jeszcze, że $\alpha+(-\alpha)=0$. Używając tych samych znakowań, możemy napisać

$$a<\alpha<A$$
$$-A'<-\alpha<-a',$$

gdzie a i a' należą do klasy niższej, A i A' zaś do klasy wyższej w przekroju wyznaczającym liczbę α; wskutek tego $A'>a$ i $A>a'$; liczba $\alpha+(-\alpha)$ jest większa od wszystkich liczb kształtu $a-A'>0$, a mniejsza od wszyst-

kich liczb kształtu $A - a' > 0$, przytem jest jedyną liczbą, posiadającą tę własność; widzimy więc, iż liczba $\alpha + (-\alpha)$ jest określona przez przekrój, w którym do klasy niższej należą wszystkie liczby wymierne ujemne, do klasy drugiej wszystkie liczby wymierne dodatnie i zero. Jest więc $\alpha + (-\alpha) = 0$.

9. *Odejmowanie.*

Różnicę liczb α i β określamy jako rozwiązanie równania $\beta + x = \alpha$; łatwo udowodnić, że zawsze istnieje liczba x taka, iż dodana do liczby danej β da sumę daną α. W rzeczy samej taką liczbą jest $x = \alpha + (-\beta)$. Wynika to z prawa przemienności i łączności przy dodawaniu; w rzeczy samej, podstawiając w $\beta + x$ na miejscu x liczbę $\alpha + (-\beta)$ otrzymamy $\beta + x = \beta + [\alpha + (-\beta)] = [(\beta + (-\beta)] + + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$. Że działanie w ten sposób określone jest jednoznaczne, wynika to z prawa monotonji przy dodawaniu; gdyby bowiem była inna liczb $y \neq x$, taka, iż $\beta + y = a$, to albo $y > x$, a wtedy na zasadzie monotonji $\beta + y > \beta + + x = \alpha$, czyli $\beta + y > \alpha$, albo $y < x$, ale wtedy $\beta + y < \beta + + x = \alpha$, czyli $\beta + y < \alpha$. i dochodzimy do sprzeczności. Tak więc liczba x, spełniająca równanie $\beta + x = \alpha$, a którą oznaczamy przez $\alpha - \beta$ jest tylko jedna, przyczem $\alpha - \beta = = \alpha + (-\beta)$.

10. *Mnożenie.*

Określimy mnożenie najprzód gdy czynniki są liczbami dodatniemi. Iloczynem dwóch liczb rzeczywistych dodatnich α i β jest liczba rzeczywista, którą oznaczać będziemy przez $\alpha . \beta$, i która określona jest przez następujące dwa warunki:

1^0 $\alpha . \beta$ jest liczbą rzeczywistą większą od iloczynu $a\, b$ dwóch dowolnych liczb wymiernych dodatnich a i b, z których pierwsza mniejsza jest od α, druga zaś mniejsza jest od β; (a należy do klasy niższej przekroju, wyznaczającego

liczbę α, b zaś należy do klasy niższej przekroju, wyznaczającego liczbę β.

2^0 Liczba $\alpha.\beta$ jest mniejsza od iloczynu $A.B$ każdych dwóch liczb wymiernych A i B, z których pierwsza jest większa od liczby α, druga większa od liczby β.

Należy wykazać, że te dwa warunki wyznaczają liczbę i tylko jedną.

W tym celu zaliczmy do klasy pierwszej liczby ujemne, liczbę zero i liczby, które są iloczynami liczb dodatnich a i b, przytem $0 < a < \alpha$, $0 < b < \beta$. Do drugiej klasy zaliczymy liczby, które są iloczynami liczb A i B, przyczem $A > \alpha$, $B > \beta$. Jeżeli jakaś liczba należy do klasy pierwszej, to każda liczba wymierna od niej mniejsza będzie także należała do klasy pierwszej; jeżeli jakaś liczba należy do klasy wyższej, to każda liczba wymierna od niej większa będzie także należeć do klasy wyższej. Jeśli więc jest liczba wymierna r nie objęta naszą klasyfikacją, to musi spełniać warunek $ab < r < AB$; ale taka liczba może być tylko jedna, bo gdyby była druga r', mniejsza, np. od r, to $ab < r' < r < AB$ i $0 < r - r' < AB - ab = (A - a)b + (B - b)a + (A - a)(B - b)$; otóż można tak wybrać liczby A, B, a i b, by różnica $AB - ab$ była mniejsza od dowolnie małej liczby dodatniej ε; wystarczy w tym celu tak wybrać liczby A i a, by $A - a$ było mniejsze od $\frac{\varepsilon}{3b}$ i jednocześnie mniejsze od liczby c, której kwadrat jest mniejszy od $\frac{\varepsilon}{2}$; tak samo wybieramy B i b, tak by $B - b$ było jednocześnie mniejsze od $\frac{\varepsilon}{3a}$ i od liczby dodatniej c. Wtedy $AB - ab < \frac{\varepsilon}{3b} . b + \frac{\varepsilon}{3a} a + c^2$, czyli $AB - ab < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. By dojść do sprzeczności, wystarczy uczy-

nić $\varepsilon < r - r'$; wtedy z nierówności $0 < r - r' < AB - ab <$ $< \varepsilon < r - r'$ wynika, że $r - r' < r - r'$, czyli sprzeczność. Stąd wynika, że nasze przypuszczenie o istnieniu dwóch liczb wymiernych r i r', nieobjętych naszą klasyfikacją, jest fałszywe. Czy nasz podział na klasy stanowi przekrój? Oczywiście tak, o ile niema ani jednej liczby wymiernej r nie należącej do jednej z dwóch klas; w przeciwnym razie dołączymy do poprzednio określonej klasy wyższej tę liczbę wymierną r, która pozostała nieobjęta naszą klasyfikacją. Z tem zastrzeżeniem dodatkowem nasz podział na klasy da nam zawsze przekrój. Liczba γ, określona przez ten przekrój, będzie właśnie iloczynem $\alpha\beta$. Łatwo sprawdzić, że γ spełnia oba warunki, które podaliśmy, jako określenie iloczynu $\alpha\beta$. Że niema innej liczby γ', spełniającej te same warunki, udowodnimy w ten sam sposób, jak poprzednio przy ustaleniu, iż niema dwóch liczb wymiernych r i r', nieobjętych naszą klasyfikacją, czyli opieramy się na nierówności $|\gamma - \gamma'| < AB - ab < \varepsilon$.

Tak więc iloczyn $\alpha.\beta$ istnieje i jest określony jednoznacznie, gdy $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Aby przejść teraz do przypadku ogólnego, gdy liczby α i β są zupełnie dowolne, damy następujące określenie: jeżeli jeden z czynników α lub β jest zero, to iloczyn jest także zero; jeśli żaden z czynników nie jest zero, to iloczyn równa się iloczynowi wartości bezwzględnych liczb α i β ze znakiem $+$ albo $-$, zależnie od tego, czy czynniki są tego samego znaku, czy różnego znaku.

Iloczyn $\alpha.\beta$ w zakresie liczb rzeczywistych posiada te same własności zasadnicze, co i iloczyn w dziedzinie liczb wymiernych, mianowicie $\alpha.\beta$ jest zawsze liczbą określoną jednoznacznie; spełnione są również prawa przemienności i łączności, t. j. $\alpha.\beta = \beta.\alpha$, $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$; dalej jedność jest modułem mnożenia, t. j. $\alpha.1 = \alpha$; wreszcie prawo monotonji: jeżeli $\beta < \gamma$, a $\alpha > 0$, to $\alpha\beta < \alpha\gamma$; jeśli $\beta < \gamma$,

$\alpha < 0$, to $\alpha\beta > \alpha\gamma$. Wszyslkie te własności łatwo udowodnić przy pomocy przekrojów. W dziale o równości i nierówności liczb rzeczywistych l. 5, określiliśmy liczbę $\frac{1}{\alpha}$ odwrotną względem liczby α; teraz z łatwością możemy udowodnić, że iloczyn takich dwóch liczb (odwrotnych) równa się jedności, t. j. $\alpha . \frac{1}{\alpha} = 1$; (dowód?).

11. *Dzielenie*

Ilorazem liczb α i β nazywamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu $\beta x = \alpha$, przyczem zakładamy $\beta \neq 0$. Taka liczba x istnieje i jest tylko jedna. Aby się przekonać o istnieniu liczby x, wystarczy sprawdzić, że liczba $\alpha . \frac{1}{\beta}$ spełnia równanie $\beta x = \alpha$, t. j. po pomnożeniu przez β daje α; w rzeczy samej $\beta . \left(\alpha . \frac{1}{\beta}\right) = \beta . \left(\frac{1}{\beta} . \alpha\right) = \left(\beta . \frac{1}{\beta}\right) . \alpha =$ $= 1 . \alpha = \alpha$ na zasadzie praw łączności i przemienności. Na mocy prawa monotonji przy mnożeniu wnioskujemy, że drugiej liczby, czyniącej zadość temu samemu określeniu niema. Tak więc iloraz, który oznaczamy $\frac{\alpha}{\beta}$ jest określony jednoznacznie. Dla $\beta = 0$ symbol $\frac{\alpha}{\beta}$ nie posiada żadnego sensu.

12. *Pierwiastkowanie.*

Przejdźmy teraz do równania $x^2 = 2$. W zakresie liczb wymiernych równanie to rozwiązania nie posiada. Okażemy, że w zakresie liczb rzeczywistych rozwiązanie istnieje, i że nawet ich jest dwa; rozwiązania równania $x^2 = 2$ będziemy nazywali pierwiastkami z dwóch i oznaczali symbolami $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

Utwórzmy w tym celu przekrój, ten sam, o którym była mowa poprzednio (l. 3). Do niższej klasy zaliczymy

liczbę zero, liczby ujemne i liczby dodatnie wymierne, których kwadrat jest mniejszy od dwóch, do klasy wyższej liczby wymierne, których kwadrat jest większy od dwóch. Niech α będzie liczbą, wyznaczoną przez ten przekrój. Liczba α spełnia równanie $x^2 = 2$, czyli α^2 równa się 2; aby to udowodnić, zauważymy, że liczba $\alpha^2 = \alpha . \alpha$, według określenia iloczynu jest wyznaczona przez przekrój, w którym do klasy niższej należą liczby ujemne, liczba zero i liczby dodatnie, które są typu $a . a'$, gdzie $0 < a < \alpha$ i $0 < a' < \alpha$, do klasy wyższej zaś należą liczby kształtu $A . A'$, gdzie $A > \alpha$, $A' > \alpha$, a oprócz tego do klasy wyższej należy liczba wymierna $r > 0$, spełniająca warunek $a . a' < r < A . A'$, o ile taka liczba istnieje, przyczem a i a' wybieramy tu z pośród liczb dodatnich pierwszej klasy.

Otóż łatwo widzieć, że taką liczbą r jest w tym wypadku liczba 2; mianowicie $a . a'$ jest zawsze mniejsze od 2, a $A . A'$ większe od 2; w rzeczy samej, jeśli $a' = a$, to $a' . a = a^2$, a więc na mocy określenie, t. j. ponieważ a należy do klasy pierwszej, aa' jest mniejsze od 2; jeśli zaś $a' \neq a$, to niech np. $a' < a$, wtedy $aa' < a^2 < 2$. Tak samo $AA' > 2$. Widzimy więc, że liczba α^2 jest wyznaczona przez przekrój, w którym do klasy niższej należą liczby wymierne mniejsze od 2, do klasy wyższej należą liczby wymierne większe od 2 i liczba 2, która jest w tym przypadku najmniejszą liczbą drugiej klasy. Ale taki przekrój jest identyczny z przekrojem, wyznaczającym liczbę 2; tak więc $\alpha^2 = 2$. Łatwo teraz udowodnić, że liczba przeciwna (symetryczna), $x = -\alpha$ spełnia to samo równanie $x^2 = 2$.

Przejdźmy teraz do określenia pierwiastka n^{go} stopnia z liczby rzeczywistej dodatniej β, czyli do rozwiązania równania $x^n = \beta$. Ponieważ równaniami algebraicznemi będziemy się zajmywać w innym dziale tej książki, więc tu określimy tylko pierwiastek dodatni. W tym celu podzielimy liczby wymierne na dwie klasy, przyczem do klasy

niższej zaliczymy liczby wymierne ujemne, liczbę zero i liczby wymierne dodatnie, których n^{ta} potęga jest mniejsza od liczby dodatniej β; do klasy wyższej zaliczymy liczby dodatnie których n^{ta} potęga jest większa od liczby β. Udowadniamy dalej, że ta klasyfikacja obejmuje wszystkie liczby wymierne, z wyjątkiem najwyżej jednej, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy liczba rzeczywista β jest liczbą wymierną, równą n^{tej} potędze innej liczby wymiernej; dopełniwszy więc ewentualnie naszą klasyfikację, otrzymamy przekrój, który wyznacza nam pewną liczbę rzeczywistą α. Teraz trzeba udowodnić, że $\alpha^n = \alpha . \alpha . \alpha \ldots \alpha = \beta$. W rzeczy samej, jeżeli jakaś liczba wymierna dodatnia jest mniejsza od α, to jej n^{ta} potęga jest mniejsza od β. Jeśli więc utworzymy podział na dwie klasy, podział, jaki należy utworzyć dla określenia liczby α^n, to ten podział okaże się identyczny z podziałem, określającym liczbę β; ztąd wniosek, iż $\alpha^n = \beta$. Szczegóły dowodu czytelnik dopełni sam. W poprzedniem rozumowaniu liczba β była dowolną liczbą dodatnią rzeczywistą, a więc mogła być liczbą wymierną. Pierwiastkowanie określiliśmy tu tylko dla wykładnika n całkowitego.

13. Rozpatrywaliśmy dotychczas wynik jednego działania, wykonanego nad liczbami niewymiernemi; możemy teraz rozpatrywać wynik całego szeregu działań nad liczbami niewymiernemi, mianowicie dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania, byle liczba tych działań była skończona i nie było śród nich dzielenia przez zero. Możemy sprawdzić, że zasadnicze prawa i wynikającego z nich prawidła, które są prawdziwe dla liczb wymiernych, są także prawomocne dla liczb niewymiernych, czyli dziedzina ich prawomocności obejmuje zbiór liczb rzeczywistych; wykonując więc przekształcenia nad liczbami oznaczonemi przez litery, nie potrzebujemy się troszczyć o to, czy litery oznaczają liczby wymierne

czy niewymierne. Pod tym względem ważne jest prawo rozdzielności czyli prawo mnożenia sumy,

(3) $$(\alpha+\beta)\,.\,\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma,$$

gdyż prawo rozdzielności stosujemy bardzo często przy dowodzeniu bardzo wielu wzorów algebraicznych. Dowód tożsamości (3) nie przedstawia trudności i polega na stwierdzeniu, iż przekrój, wyznaczający liczbę $(\alpha+\beta)\gamma$ jest identyczny z przekrojem, wyznaczającym liczbę $\alpha\gamma+\beta\gamma$. W gruncie rzeczy mamy tu do czynienia z faktem następującem: wartość przybliżoną liczby $(\alpha+\beta)\gamma$ z dowolną dokładnością otrzymamy, zastępując liczby α, β, γ wartościami przybliżonemi a, b i c, i wykonując nad niemi te same działania, byle tylko liczby a, b i c różniły się dostatecznie mało odpowiednio od liczb α, β, γ.

Niech $f(\alpha,\beta)$ oznacza wynik jakichkolwiek działań nad liczbami niewymiernemi α i β, z wyłączeniem dzielenia przez zero. Możemy otrzymać liczbę tak mało różniącą się od $f(\alpha,\beta)$ jak się podoba, jeśli zastąpimy α i β liczbami wymiernemi a i b i wykonamy nad a i b te same działania, co da nam $f(a,b)$, byle tylko liczby a i b różniły się dostatecznie mało od liczb α i β. Możemy tę samą treść wyrazić w sposób następujący: niech ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią; w zależności od ε wyznaczyć można dwie liczby b' i B' takie, że skoro tylko liczby wymierne a i b spełniają nierówności:

$$a'<a<A' \quad \text{i} \quad b'<b<B', \text{ to}$$

$$f(\alpha,\beta)-\varepsilon<f(a,b)<f(\alpha,\beta)+\varepsilon,$$

czyli inaczej: $$|f(\alpha,\beta)-f(a,b)|<\varepsilon.$$

Podobne twierdzenie zachodzi, oczywiście, i w tym przypadku, gdy ilość liczb niewymiernych jest większa od dwóch, byle tylko była ich liczba skończona. Czytelnik może sprawdzić słuszność tylko co wypowiedzianego twierdzenia na poszczególnych przykładach; można byłoby dać

dowód ogólny, oparty na indukcji, ale dla nas to jest zbyteczne, gdyż w innem miejscu wrócimy do tego samego tematu, mianowicie w dziale o ciągłości funkcji. Udowodnimy, że jeśli funkcja jest ciągła i jeśli znamy jej wartości dla wartości wymiernych zmiennych, to tem samem wyznaczone mamy i wartości tejże funkcji dla wartości niewymiernych zmiennych. Własność, o której mowa była w tym ustępie, jest więc tylko przypadkiem szczególnym ogólniejszej własności, która jest wynikiem ciągłości. Nie pominęliśmy jednak milczeniem tej sprawy w rozdziale o liczbach niewymiernych z powodu jej ważności w zastosowaniach, mianowicie przy wyliczeniach liczbowych.

14. *Przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych.*

Jasna rzecz, że możemy tworzyć przekroje w dziedzinie liczb rzeczywistych zupełnie w ten sam sposób, jak w dziedzinie liczb wymiernych. W tym celu wystarczy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych podzielić na dwie klasy, z zachowaniem tych samych trzech warunków:

1) Każda liczba rzeczywista należy do pierwszej lub do drugiej klasy.

2) Żadna klasa nie jest pusta.

3) Każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy.

Zbadajmy, co nam dać może taki przekrój. Przedewszystkiem nie może być jednocześnie liczby największej α w pierwszej klasie, i liczby najmniejszej β w drugiej klasie, gdyż wtedy liczba rzeczywista $\frac{\alpha+\beta}{2}$, spełniające nierów- $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$, nie należałaby do żadnej klasy.

Zbadajmy teraz, czy pierwsza klasa może nie mieć ostatniego elementu, t. j. największej liczby i jednocześnie klasa druga nie mieć pierwszego, t. j. nie zawierać najmniejszej liczby.

Oznaczmy dowolną liczbę pierwszej klasy przez α, dowolną liczbę drugiej klasy naszego przekroju przez β, a same klasy przez (α) i (β), tak iż liczby zbioru (α) więcej liczby zbioru (β) stanowią zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. W związku z danym przekrojem utwórzmy nowy przekrój w zakresie liczb wymiernych, przyczem do niższej klasy zaliczymy każdą liczbę wymierną a, która należy do klasy poprzednio wspomnianej (α), do klasy wyższej zaliczymy każda liczbę wymierną b, która należy do klasy (β). Jasna rzecz, że ten podział na klasy obejmuje ogół wszystkich liczb wymiernych, bo każda liczba wymierna r, będąc jednocześnie elementem zbioru liczb rzeczywistych, jako taka musi należeć w pierwszym przekroju bądź do klasy (α), bądź do klasy (β), a więc w drugim przekroju do klasy (a) lub do klasy (b). Przekrój w dziedzinie liczb wymiernych, w którym klasą niższą jest klasa (a), klasą zaś wyższą (b), jak każdy przekrój w dziedzinie liczb wymiernych, wyznacza nam pewną liczbę rzeczywistą δ. Liczba δ, jak każda liczba rzeczywista musi należeć bądź do klasy (α), bądź do klasy (β). Jeżeli δ należy do klasy (α), to jest, powiadam, największą liczbą tej klasy. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności; gdyby jakaś liczba α, należąca do (α), była większa od δ, t. j. gdyby $\delta < \alpha$, to można byłoby znaleźć liczbę wymierną r, zawartą między δ i α, t. j. spełniającą nierówność $\delta < r < \alpha$; lecz liczba r, jako mniejsza od liczby α, musi należeć do klasy (α) w pierwszym przekroju, a więc do klasy (a) w drugim; lecz w takim razie nie może mieć miejsca nierówność $r > \delta$, gdyż żadna liczba klasy niższej (a) nie może być większa od liczby δ, określonej przez odpowiedni przekrój. Doszliśmy więc do sprzeczności. Tak samo udowodnimy, że, jeśli δ należy do klasy (β), to musi być najmniejszą liczbą tej klasy.

Tak więc udowodniliśmy, że w przekroju utworzonym

w dziedzinie liczb rzeczywistych, albo w pierwszej klasie jest liczba największa, albo w drugiej klasie liczba najmniejsza.

Tu więc zaznacza się wyraźna różnica między przekrojami w zakresie liczb wymiernych, a w zakresie liczb rzeczywistych. Otrzymany wynik jest bardzo ważny; można go wyrazić krótko, mówiąc, iż przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych nie może mieć „luki“. Widzieliśmy, iż przekrój w dziedzinie liczb wymiernych może dać „lukę“; takie właśnie przekroje dały nam możność rozszerzenia zakresu liczb wymiernych przez wprowadzenie liczb ogólniejszej natury; w ten sposób „luka“ jakgdyby została zapełniona. Gdyby coś podobnego zachodziło w dziedzinie liczb rzeczywistych, t. j. gdyby i tu możliwa była „luka“, moglibyśmy mieć otwartą drogę do nowego rozszerzenia pojęcia liczby i do utworzenia liczb ogólniejszych od liczb rzeczywistych; udowodniliśmy, że tak nie jest.

Pozostają więc dwie możliwości, albo w klasie niższej (α) jest liczba największa, albo w klasie wyższej (β) jest liczba najmniejsza. Obie te ewentualności mogą się zdarzyć. By się o tem przekonać, rozpatrzymy odpowiedni przykład. Do klasy niższej (α) zaliczymy wszystkie liczby rzeczywiste mniejsze od liczby δ, do klasy drugiej wszystkie liczby rzeczywiste większe od δ, samą zaś liczbę δ zaliczymy do klasy niższej czy wyższej, zależnie od tego, czy chcemy mieć przykład pierwszej możliwości czy drugiej.

Otrzymany wynik możemy streścić w następującem wysłowieniu: jeżeli utworzymy przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych, to ten przekrój wyznacza nam pewną liczbę rzeczywistą δ, posiadająca tę własność, że każda liczba rzeczywista od niej mniejsza należy do klasy niższej (α), każda zaś liczba rzeczywista, większa od δ należy do klasy wyższej (β). Sama zaś liczba δ może należeć do klasy (α),

bądź do klasy (β). Liczba δ jakby „oddziela“ jedną klasę od drugiej.

Określenie. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (wymiernych i niewymiernych) nazywamy continuum liczbowem lub arytmetycznem.

15. *Interpretacja geometryczna.*

Dla nadania naszym rozważaniom większej poglądowości bez ujmy dla ścisłości będziemy często posługiwać się interpretacją geometryczną. Interpretacja geometryczna oparta jest na odpowiedniości doskonałej między continuum liczbowem a continuum linjowem geometrycznem, przyczem continuum linjowem nazywamy zbiór wszystkich punktów prostej (p). Pod odpowiednością doskonałą rozumiemy odpowiedność, w którym każdemu elementowi pierwszego zbioru odpowiada zawsze jeden i tylko jeden element drugiego zbioru i odwrotnie; w danym przypadku znaczy to, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada na prostej (p) jeden tylko punkt i, odwrotnie, każdemu punktowi prostej (p) odpowiada tylko jedna liczba rzeczywista; jeśli prosta (p) jest, np. osią odciętych, to liczba, odpowiadająca dowolnemu punktowi tej osi nazywa się odciętą tego punktu i oznacza się przez x.

Wskutek tej odpowiedniości doskonałej możemy posługiwać się przy wysławianiu twierdzeń analitycznych językiem geometrycznem; każdej zależności analitycznej między liczbami odpowiada zależność ściśle określona między punktami i odwrotnie. Dzięki temu można połączyć obrazowość języka geometrycznego ze ścisłością analityczną, przyczem pojęcia geometryczne są tylko obrazami odpowiednich pojęć analitycznych, tak iż pomimo posługiwania się terminami geometrycznemi, rozważania podane w tej terminologji nie są wcale oparte na geometrji; czyli tak zw. arytmetyzycja matematyki daje się doskonale pogodzić z używaniem wysłowienia geometrycznego. Można na zasadzie

odpowiedniości doskonałej sporządzić sobie słowniczek dla zamiany terminów analitycznych na odpowiednie nazwy geometryczne i odwrotnie. Tak więc punkt, to liczba rzeczywista, prosta nieograniczona (oś), to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, odcinek ograniczony punktami A i B oznacza zbiór liczb, składający się z liczb a i b, odpowiadających punktom A i B i ze wszystkich liczb rzeczywistych x, zawartych między liczbami a i b; innemi słowy, odcinkowi AB odpowiada zbiór punktów x, spełniających nierówności $a \leqslant x \leqslant b$, jeśli $a < b$. Ten zbiór punktów oznaczamy krótko symbolem (a, b) i nazywamy przedziałem; mówimy: punkt należy do przedziału, nie należy do przedziału i t. d. Punkt A leży na lewo od punktu B, na prawo od punktu B lub zlewa się z nim, zależnie od tego, czy $a < b$, czy też $a > b$, lub wreszcie $a = b$. Długość odcinka AB jest to liczba dodatnia $|a - b|$ i t. d. Inne przykłady spotkamy później.

Odpowiedniość doskonałą między continuum liczbowem, a continuum linjowem geometrycznem przyjmujemy tu jako pewnik. Jasna rzecz, że przy pomocy odpowiedniego układu pewników geometrycznych można istnienie takiej odpowiedniości udowodnić. Lecz rozważania tego rodzaju odbiegają daleko od naszego przedmiotu i należą do dziedziny badań nad podstawami geometrji, dokąd odsyłamy interesujących się tą kwestją.*)

Idąc dalej w tym samym kierunku, możemy ustalić odpowiedniość między parami x, y liczb rzeczywistych a punktami na płaszczyźnie. Zbiorowi wszystkich takich par x, y odpowiadać będzie w sposób doskonały zbiór wszystkich punktów płaszczyzny. Parę liczb rzeczywistych

*) „Encyclopédie des sciences mathématiques" tome III, premier volume, „Principe de la geométrie" par F. Enriques. Tam wskazana jest i literatura przedmiotu.

x, y nazywamy z tego powodu punktem, albo punktem analitycznym na płaszczyźnie. Tak samo przyjmiemy odpowiedniość doskonałą między trójkami x, y, z liczb rzeczywistych a punktami przestrzeni; taką trójkę liczb rzeczywistych nazywać będziemy także punktem, albo inaczej punktem analitycznym w przestrzeni. Zbiory utworzone z p liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ będziemy nazywali zbiorami punktów analitycznych w przestrzeni p wymiarowej.

16. Wróćmy do continuum liczbowego. Wiemy, że zbiór ten zawiera liczby rzeczywiste, t. j. liczby wymierne i niewymierne; z pośród liczb niewymiernych znamy i za pomocą osobnych symboli $\sqrt[n]{a}$ oznaczamy te liczby niewymierne, które powstają z pierwiastkowania, gdzie liczba podpierwiastkowa a jest wymierna i dodatnia; takie liczby są pierwiastkami równań kształtu $x^n = a$. Idąc tą samą drogą, możemy określić liczby niewymierne, które powstają w ten sam sposób, ale przez połączenie całego szeregu działań tego rodzaju, t. j. te, które oznaczamy symbolami, zawierającemi skończoną ilość działań, między któremi są pierwiastkowania. Taką jest np. liczba $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$. Czy zbiór wszystkich liczb tego rodzaju, t. j. liczb niewymiernych, utworzonych w ten sposób, wyczerpuje wszystkie liczby niewymierne? Zobaczymy później, że pierwiastki równań algebraicznych stopnia n^{go} o spółczynnikach wymiernych stanowią klasę obszerniejszą od klasy liczb określonych przy pomocy skończonej liczby pierwiastkowań i innych działań algebraicznych, wykonanych nad liczbami wymiernemi, o ile $n > 4$. Ale i ta obszerniejsza klasa liczb, które nazywamy liczbami algebraicznemi, nie wyczerpuje wszystkich liczb rzeczywistych. Podamy później określenie liczb π i e; można udowodnić, że te liczby nie mogą być pierwiastkami równania algebraicznego jakiegokolwiek stopnia o współczynnikach wymiernych (albo o współczyn-

nikach algebraicznych, co wychodzi na jedno). Na takie liczby, jak e i π, zwane przestępnemi, nie należy się zapatrywać jako na jakieś wyjątki; przeciwnie. Do continuum powrócimy później i w związku z tem wrócimy jeszcze raz do poruszonego w tym miejscu pytania.

Ciągi. Granica ciągu.

17. *Określenie ciągu.*

Ciągiem nazywamy zbiór liczb, danych w pewnym określonym porządku, tak iż każda liczba, zwana wyrazem ciągu, posiada swoje określone miejsce w ciągu, i odwrotnie każdy wyraz jest określony w zależności od swego położenia wśród innych liczb ciągu. Istnieje więc w ciągu wyraz pierwszy, który oznaczać będziemy przez a_1, wyraz drugi a_2, wyraz trzeci a_3 i t. d.; wyraz, zajmujący miejsce n^{te} licząc od początku, oznaczać będziemy przez a_n i t. d. Liczbę n w symbolu a_n nazywamy wskaźnikiem. Każdy wyraz ciągu jest funkcją liczby całkowitej dodatniej n (wskaźnika), która wskazuje numer porządkowy tego wyrazu, niezależnie od tego, czy znamy czy nie znamy wzoru, wyrażającego tę zależność funkcjonalną. Ogólna postać ciągu jest więc następująca:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Wyraz a_n nosi nazwę wyrazu ogólnego.

Zajmować się będziemy ciągami nieskończonemi, t. j. takimi, w których liczba wyrazów przewyższa dowolnie wielką liczbę całkowitą dodatnią n.

Ciąg skończony jest dany, jeśli znamy *wszystkie* wyrazy tego ciągu; o ciągu nieskończonym mówimy, że jest dany, oczywiście, w nieco odmiennem znaczeniu, gdyż wszystkich wyrazów takiego ciągu napisać i wyczerpać nie możemy. Termin ten dla ciągów nieskończonych oznacza, że dawszy sobie z góry dowolnie wielką liczbę całkowitą

dodatnią n, znamy wszystkie wyrazy od a_1 do a_n i moglibyśmy te wyrazy po kolei napisać. Może się to stać dzięki temu, iż znamy prawo tworzenia się wyrazów tego ciągu; prawo to może być dane za pomocą związku między wyrazem a_n i wskaźnikiem n w postaci wzoru, np. $a_n = \frac{1}{n}$, lub $a_n = (-1)^n n + n$, lub $a_n = n^2 + (-5)^n$ i t. p.; kładąc w tych wzorach na miejscu n po kolei liczby ciągu naturalnego: 1, 2, 3,.... otrzymamy wyrazy kolejne odpowiednich ciągów:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, \ldots, (-1)^n n + n, \ldots$$

$$-4, 29, -116, 641, \ldots, n^n + (-5)^n, \ldots$$

Ciąg może być dany i bez pomocy takiego wzoru. Niech, np. ciąg będzie określony w następujący sposób: a_n równa się liczbie dzielników liczby n, włączając jeden i samą liczbę n. Otrzymujemy ciąg:

$$1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, \ldots$$

Inny przykład ciągu: pierwsze dwa wyrazy równają się jedności, t. j. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, każdy zaś następny wyraz równa się sumie dwóch poprzedzających wyrazów, t. j. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Jest to tak zwany ciąg Fibonacci'ego:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Oto jeszcze parę przykładów ciągów:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}; \; a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + (-1)^n \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2; \; a_n = n \cos^2\frac{n\pi}{2} + $$
$$+ (n+1) \sin^2\frac{n\pi}{2}; \; a_n = (n+1)\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2};$$

$a_n = \dfrac{n}{\cos^2\frac{n\pi}{2} + n \sin^2\frac{n\pi}{2}}$; $a_n =$ największemu dzielnikowi

nieparzystemu liczby n; $a_n = E(\sqrt{n})$, gdzie $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą jednak od liczby x, czyli mieszczącą się w liczbie x.

Czytelnik napisze według wskazanych praw pewną liczbę wyrazów odpowiednich ciągów.

18. Monotonicznym nazywamy ciąg, w którym dwa kolejne wyrazy a_n i a_{n+1} są ze sobą w związku, wyrażającym się zawsze, t. j. dla każdego n, jedną albo drugą z dwóch nierówności $a_n \leqslant a_{n+1}$, lub $a_n \geqslant a_{n+1}$, oczywiście, jedną z nich zawsze z wykluczeniem drugiej. Jako przypadek szczególny, ciągiem monotonicznym jest ciąg, w którym wszystkie wyrazy są równe, np. ciąg $a_n = 1$, t. j.

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

Wśród ciągów monotonicznych zasługują na uwagę ciągi (stale) rosnące i ciągi malejące. Ciągiem rosnącym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz jest mniejszy od następnego wyrazu, t. j. w którym $a_n < a_{n+1}$; ciągiem malejącym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz jest większy od następnego, t. j. $a_n > a_{n+1}$. Tak np. ciągi $a_n = n^2$ lub $a_n = \frac{n-1}{n}$ są ciągami rosnącemi, a ciągi $a_n = \frac{1}{n^2}$ lub $a_n = 2^{-n}$ są ciągami malejącemi. Przykładem ciągu monotonicznego jest ciąg: $a_n = n \sin^2 \frac{\pi n}{2} + (n+1) \cos^2 \frac{\pi n}{2}$, t. j. ciąg:

$$1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots\ldots$$

który jednak nie jest rosnący, bo w nim dwa kolejne wyrazy mogą być sobie równe.

Ciągi, ograniczone od góry, i ciągi ograniczone od dołu.

Ciąg jest ograniczony od góry, jeżeli wśród liczb rzeczywistych M istnieje choć jedna, większa od wszystkich

liczb danego ciągu, t. j. taka, że nierówność $a_n < M$ jest spełniona nieskończoną ilość razy dla każdej bez wyjątku wartości wskaźnika n; oczywiście, iż, jeżeli jest jedna taka liczba M, to istnieje ich nieskończenie wiele, bo każda liczba $M' > M$ może ją zastąpić. Ciąg jest ograniczony od dołu, jeśli istnieje liczba m mniejsza od wszystkich liczb danego ciągu, t. j. taka, że nierówność $a_n > m$ jest spełniona dla każdej bez wyjątku wartości wskaźnika n.

Ciąg może być ograniczony od dołu i od góry; wtedy ciąg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów danego ciągu, jest ograniczony od góry. Ciąg, w którym wszystkie wyrazy są dodatnie, jest już przez to samo ograniczony od dołu; ciąg, w którym wszystkie wyrazy są ujemne, jest oczywiście ograniczony od góry. Tak samo ciąg rosnący jest zawsze ograniczony od dołu, a ciąg malejący od góry.

Przykłady: Ciąg $a_n = -n^2 + 20n$ jest ograniczony od góry, gdyż $a_n < 101$ dla każdego n; nie jest natomiast ograniczony od dołu. Ciąg $a_n = n \sin^2 \frac{n\pi}{2} - 100$ jest ograniczony od dołu, gdyż $a_n > -101$ dla każdego n, nie jest natomiast ograniczony od góry; w rzeczy samej $n \sin^2 \frac{n\pi}{2} - 100$ będzie liczbą większą od dowolnie wielkiej liczby dodatniej M., o ile n będzie liczbą nieparzystą większą od $M + 100$. Ciąg $\frac{10000 . \{1 + (-1)^n\}}{n} = a_n$ jest ograniczony od góry i od dołu, gdyż tu

$$-2 < a_n < 10001.$$

Tak samo ciąg: $a_n = 5 - 10 \sin^2 \frac{\pi n}{4}$, czyli: $0, -5, 0, +5, 0, -5, 0, \ldots$ jest ograniczony od góry i od dołu, gdyż dla każdego n jest $|a_n| < 6$.

19. *Granica ciągu.*

Niech będzie dany ciąg: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Zbadajmy wyrazy tego ciągu pod względem pewnej własności (W), t. j. zbadajmy, czy liczby naszego ciągu tę własność (W) posiadają, czy też nie. Wynik tego badania może być trojaki:

1⁰ Wszystkie liczby ciągu z wyjątkiem może skończonej ilości liczb tę własność posiadają; będziemy krótko wyrażali tę okoliczność, mówiąc, że „prawie“ wszystkie wyrazy ciągu tę własność posiadają.

2⁰ Wszystkie liczby ciągu z pominięciem może skończonej liczby wyjątków tej własności nie posiadają, czyli, powiemy, „prawie“ żadna liczba ciągu tej własności nie posiada.

3⁰ Ani 1⁰, ani 2⁰ nie jest prawdą, czyli jest w ciągu nieskończenie wiele wyrazów, tę własność (W) posiadających, i nieskończenie wiele wyrazów, które tej własności liczbowej (W) nie posiadają.

Przykłady: Niech dany będzie ciąg: $a_n = \frac{1000\{1+(-1)^n\}}{n}$, a własnością liczbową (W) będzie: „liczba x jest mniejsza od jedności“. Utożsamijmy x z liczbami naszego ciągu: $0, 1000, 0, 500, 0, \frac{1000}{3}, 0, 250, .$; a_1 posiada żądaną własność, a_2 jej nie posiada, a_3 posiada i t. d.; zastanowiwszy się chwilę, przyjdziemy do przekonania, że „prawie“ wszystkie wyrazy danego ciągu posiadają żądaną własność (W), gdyż tej własności nie posiadają tylko te wyrazy ciągu, których wskaźnik jest parzysty i mniejszy od 2000, czyli jest liczba skończona wyjątków.

Niech dany będzie ten sam ciąg, a własnością (W) niech będzie: „liczba x jest większa od 10“. Utożsamijmy x z kolejnemi liczbami ciągu. Jasna rzecz, że „prawie“ żadna liczba ciągu tej własności nie posiada, gdyż warun-

kowi żądanemu czynią zadość tylko te wyrazy ciągu, których wskaźnik jest parzysty i mniejszy od 200.

Niech dany będzie ciąg $a_n = n$, t. j. ciąg 1, 2, 3, 4, 5,..., n,..., a własnością (W) niech będzie: „liczba x jest parzysta" i spróbujmy utożsamić liczbę x z wyrazami naszego ciągu. Okazuje się, że jest nieskończenie wiele wyrazów naszego ciągu, czyniących zadość żądanemu warunkowi, ale jest także nieskończenie wiele wyrazów, które nie spełniają tego warunku. Zdanie więc: „prawie" wszystkie wyrazy danego ciągu są parzyste, byłoby fałszywe. Tak samo fałszywe byłoby zdanie: „prawie" wszystkie wyrazy naszego ciągu są nieparzyste.

Jeżeli zachodzi przypadek 1^0, t. j. jeżeli „prawie" wszystkie wyrazy naszego ciągu daną własność posiadają, to zawsze istnieje pewien wskaźnik n_0, taki, że wszystkie wyrazy o większym wskaźniku (t. j. dalsze) tę własność bez wyjątku posiadają: gdy $n > n_0$, to a_n posiada własność (W). W rzeczy samej, z założenia wynika, że istnieje skończona liczba wyjątków, np. k wyrazów wyjątkowych o wskaźnikach rosnących $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tak iż $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$ są jedynemi wyrazami danego ciągu, nie spełniającemi warunku (W). Wystarczy wziąć $n_0 = n_k$; dla $n > n_0$, a_n spełniać będzie warunek (W).

20. Przypuśćmy, że ciąg nasz posiada własność następującą: jakkolwiek wielką liczbę M wybierzemy, „prawie" wszystkie wyrazy naszego ciągu są od M większe; innemi słowy, począwszy od pewnego miejsca, wyrażonego wskaźnikiem n_0, wszystkie wyrazy ciągu są liczbami, większemi od M. Jeśli to zachodzi, mówimy krótko, że ciąg dąży do nieskończoności lub rośnie nieograniczenie, co oznaczamy, pisząc $a_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$.

Uwaga. Nie możemy traktować „nieskończoności" i symbolu ∞ na równi z innemi liczbami. Chociaż często

będziemy używali terminu „nieskończoność“ dla większej wyrazistości i dla skrócenia, to jednak używać będziemy tego terminu tylko w pewnych zupełnie określonych zdaniach, których sens został uprzednio ustalony przy pomocy osobnej definicji, tak iż każde zdanie, zawierające termin „nieskończoność“ lub symbol ∞, możemy na mocy tylko co wspomnianej definicji zastąpić przez inne zdanie, nie zawierające tego terminu. Poprzednio już używaliśmy wyrazu „nieskończoność“ w zdaniu takiem jak: „liczba wyrazów ciągu jest nieskończona“; to znaczy, jak wiemy, że liczba wyrazów jest większa od n, jakkolwiek wielką jest liczba całkowita dodatnia n. Teraz nauczyliśmy się używać terminu „nieskończoność“ w zdaniu takiem, jak: „a_n dąży do nieskończoności wraz z n, jeśli $a_n = n^2$“. Jest to skrócone i symboliczne wysłowienie, mające zastąpić następujące dłuższe zdanie: Jakkolwiek wielką wybiorę liczbę M, mogę do niej dobrać taką liczbę n_0, że, począwszy od wyrazu o wskaźniku n_0, wszystkie wyrazy ciągu są od M większe. Fakt ten stwierdzamy, oczywiście, przez dyskusję odpowiedniej nierówności; tutaj np. należy stwierdzić, że nierówność

$$n^2 > M$$

jest spełniona „prawie“ dla wszystkich wartości n; w rzeczy samej, na to, by $n^2 > M$, trzeba, by $n > \sqrt{M}$; wystarczy, oczywiście, wziąć za n_0 największą liczbę całkowitą, zawartą w $\sqrt{M}$, czyli $E(\sqrt{M})$; wszelka liczba całkowita n, większa od takiej liczby $n_0 = E(\sqrt{M})$, będzie również większa od $\sqrt{M}$, a więc warunek żądany będzie spełniony, gdyż liczba $n^2 = a_n$ będzie większa od M, skoro tylko $n > n_0$.

Ciąg, ograniczony od góry, nie może, oczywiście, dążyć do nieskończoności; jeśli ciąg nie jest ograniczony od góry, to może dążyć do nieskończoności, ale nie koniecznie; tak, np. ciąg, przytoczony poprzednio jako przykład ciągu,

który nie jest ograniczony od góry, mianowicie ciąg $a_n = n \sin^2 \frac{\pi n}{2} - 100$, nie dąży do nieskończoności; w rzeczy samej, jeśli n jest liczbą parzystą, to $a_n = -100$.

Przykłady: Jeżeli $a_n = n \sin^2 \frac{\pi n}{2} + (n+1) \cos^2 \frac{\pi n}{2}$, to $a_n \to \infty$ dla $n \to \infty$; wystarczy zauważyć, że $a_n \geqslant n$.

Jeżeli $a_n = \frac{n^2}{100} - n$, to $a_n \to \infty$; wystarczy zauważyć, że $a_n > M$, skoro tylko $n > n_0$, gdzie

$$n_0 = 50 + E\{\sqrt{2500 + 100 M}\}.$$

Jeżeli $a_n = n^2 \sin^2 \frac{\pi n}{2} + n \cos^2 \frac{\pi n}{2}$, to $a_n \to \infty$; wystarczy zauważyć, że tu $a_n \geqslant n$.

21. *Granica zero.*

Dajmy na to, że ciąg nasz posiada następującą własność: jakkolwiek mała jest liczba dodatnia ε, „prawie" wszystkie wyrazy ciągu mają wartość bezwzględną, mniejszą od ε, t. j. każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada pewien wskaźnik n_0, taki że, skoro tylko $n > n_0$, to $|a_n| < \varepsilon$; ten wskaźnik n_0 zależy wogóle od ε, dlatego też zamiast n_0 piszemy często $n_0(\varepsilon)$. Jeżeli taka własność zachodzi, to mówimy krótko, że ciąg dąży do zera, i piszemy $a_n \to 0$ dla $n \to \infty$, lub $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$; to samo wyrażamy, mówiąc, że granicą ciągu jest zero.

Przykłady: Jeżeli $a_n = \frac{1}{n}$, to $\lim\limits_{n \to 0} a_n = 0$; w rzeczy samej, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, skoro tylko $n > \frac{1}{\varepsilon}$; jeśli więc $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, przyczem zakładamy $\varepsilon < 1$, to $n > n_0$ pociąga nierówność $a_n < \varepsilon$, gdyż $|a_n| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0 + 1}$; lecz $n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, czyli

$\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$; z dwóch nierówności $|a_n| \leqslant \frac{1}{n_0+1}$ i $\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$, wynika $|a_n|<\varepsilon$, co trzeba było wykazać.

Jeżeli $a_n = \frac{1}{n^2}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; wystarczy tu przyjąć $n_0 = E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$, dla $\varepsilon<1$.

Jeżeli $a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; wystarczy zauważyć, że $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$; dalej jak w przykładzie pierwszym.

Jeżeli $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; wystarczy zauważyć, iż $|a_n| \leqslant \frac{2}{n}$.

Jeżeli $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\{1+(-1)^n\}$, to $\lim a_n = 0$; wystarczy zauważyć, że $|a_n| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$, a więc, jeżeli n_0 tak obierzemy, by $n_0 = E\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right)$, to $n>n_0$ pociągnie $|a_n|<\varepsilon<1$.

22. *Granica g (dowolna).*

Symbol $a_n \to g$ dla $n\to\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oznacza, że $a_n - g$ dąży do zera. Mówimy wtedy, że granicą ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ jest liczba g; orzeczenie takie jest równoznaczne z orzeczeniem, że granicą ciągu $a_1 - g$, $a_2 - g$, $a_3 - g, \ldots, a_n - g, \ldots$ jest zero. A więc „prawie“ wszystkie wyrazy tego ostatniego ciągu są, co do wartości bezwzględnej, mniejsze od ε, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Możemy więc nasze pierwotne określenie przekształcić w sposób następujący: jeżeli każdej liczbie dodatniej do-

wolnie małej ε odpowiada taka liczba $n_0(\varepsilon)$, iż nierówność $n > n_0(\varepsilon)$ pociąga nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, to wtedy i tylko wtedy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$.

Uwaga. Zastrzeżenie, że n_0 ma być całkowite, nie posiada bynajmniej znaczenia zasadniczego i może być nawet zupełnie pominięte, o ile przez n_0 oznaczamy nie koniecznie wskaźnik, lecz wogóle liczbę, posiadającą tę własność, że wyrazy ciągu o wskaźniku n, większym od n_0, posiadają żądaną własność.

Przykład: Jeżeli $a_n = \frac{n}{n+1}$, to $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$. W rzeczy samej $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$; a_n będzie się różniło od 1 mniej, niż o ε, jeśli $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Jeżeli $a_n = \frac{n+1}{2n}$, to $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$; w rzeczy samej $\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}$, czyli $|a_n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n}$, czyli skoro tylko $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, to $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$.

Jeżeli $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$, to $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$; w rzeczy samej, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$, $\frac{1}{2} - a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}}{2\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right\}}$;
$|\frac{1}{2} - a_n| < \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}}{4\sqrt{n}} = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right\}$; wystarczy teraz zbadać nierówność $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 < 4\varepsilon$, która daje nam $n > \frac{1}{64\varepsilon^2(1+2\varepsilon)^2}$; ponieważ $\frac{1}{64\varepsilon^2} > \frac{1}{64\varepsilon^2(1+2\varepsilon)^2}$, więc widzimy, że $n > \frac{1}{64\varepsilon^2}$ pociąga nierówność $|\frac{1}{2} - a_n| < \varepsilon$, co

było do okazania. Jeżeli, np., $\varepsilon = \frac{1}{100}$, to $\frac{1}{64\varepsilon^2} = 156{,}2\ldots$; wystarczy wziąć $n > 156$, by a_n różniło się od $\frac{1}{2}$ już mniej, niż o $\frac{1}{100}$; jeżeli, np., $n = 13^2$, to $a_n = \sqrt{182} - 13 = 0{,}4907\ldots$ i różnica $\frac{1}{2} - a_n = 0{,}0092\ldots$ jest istotnie mniejsza od $\frac{1}{100}$.

Określiliśmy więc, co znaczy, że $a_n \to g$, $a_n \to 0$, $a_n \to \infty$, gdy n rośnie nieograniczenie. Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia znaczenie symbolu $a_n \to -\infty$; oznacza to poprostu, że $-a_n \to \infty$, gdy n rośnie nieograniczenie. Tak, np., $a_n \to -\infty$, jeżeli $a_n = 1000n - n^2$.

23. Zobaczymy, że są ciągi, które nie dążą do żadnej granicy, ani do ∞, ani do $-\infty$. Zanim podamy odpowiednie przykłady, udowodnimy następujące:

Twierdzenie. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to jest, jeśli ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ posiada granicę, to począwszy od pewnego miejsca wartość bezwzględna różnicy dwóch jakichkolwiek wyrazów ciągu jest mniejsza od ε. Czyli inaczej: jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, istnieje wskaźnik n_0 taki, że jeżeli $n > n_0$ i $m > m_0$, to $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Mówiąc, że ciąg dąży do granicy, tem samem wykluczamy przypadek, gdy $a_n \to \infty$ lub $a_n \to -\infty$. Tak więc, na mocy założenia, jest $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$. Istnieje więc taki wskaźnik n_0, że skoro tylko $n > n_0$, to $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$; jeżeli więc i $m > n_0$, to i $|a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}$; lecz z tych dwóch nierówności wynika $|a_n - a_m| < \varepsilon$; wystarczy bowiem zauważyć, że $a_n - a_m = a_n - g + g - a_m = (a_n - g) + (g - a_m)$ i napisać że $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, t. j. że wartość bezwzględna sumy jest mniejsza od sumy wartości bezwzględnych składników, lub conajwyżej tej sumie równa; utożsamijmy x z $a_n - g$, y z $g - a_m$; nierówność $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

daje właśnie $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, czyli, rzeczywiście, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, co było do okazania.

Stąd wniosek następujący: jeżeli istnieje określona liczba dodatnia α taka, iż dla dowolnie wielkich wskaźników n i m jest $|a_n - a_m| > \alpha$, to nasz ciąg nie posiada granicy; należy to rozumieć w ten sposób, iż wśród par wskaźników n_1 i m_1 takich, że $|a_{n_1} - a_{m_1}| > \alpha$ istnieją takie, dla których i n_1 i m_1 większe są od liczby n_0 dowolnie wielkiej. Tak więc nie znaczy to wcale, by nierówność $|a_u - a_m| > \alpha$ była spełniona dla wszystkich wskaźników n i m większych od n_0, wystarczy, by nierówność $|a_n - a| > \alpha_m$ zachodziła dla niektórych tylko par n_1, m_1, byle tylko wśród tych par wskaźników n_1 i m_1 były takie, w których i n_1 i m_1 przewyższają dowolnie wielką liczbę.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Niech $\varepsilon = \alpha$; jeżeli istnieje granica, to można znaleźć liczbę n_0, taką, że, skoro tylko $n > n_0$ i $m > n_0$, to $|a_n - a_m| < \varepsilon = \alpha$; wybierzmy wskaźniki n i m z pośród tych par n_1, m_1, przy których $|a_{n_1} - a_{m_1}| > \alpha$, z zachowaniem warunku $n_1 > n_0$ i $m_1 > n_0$, co, jak wiemy, jest możliwe; jeśli teraz $n = n_1$ i $m = m_1$, to mamy $|a_{n_1} - a_{m_1}| < \alpha$, bo $n_1 > n_0$, $m_1 > n_0$, ale jednocześnie także $|a_{n_1} - a_{m_1}| > \alpha$; doszliśmy więc do sprzeczności, co dowodzi, że istnienie granicy jest niemożliwe, o ile spełnione są warunki założenia.

Przypuśćmy, że dany jest ciąg: $a_n = \cos\pi(n-1)$, t. j. ciąg: $1, -1, +1, -1, \ldots$; albo inaczej $a_n = 1$, jeżeli wskaźnik jest liczbą nieparzystą, $a_n = -1$, jeżeli n jest liczbą parzystą. Ponieważ ciąg ten jest ograniczony od góry i od dołu, nie może tu ani $a_n \to \infty$, ani $a_n \to -\infty$.

Ciąg ten nie dąży również do żadnej granicy g; w rzeczy samej, jeżeli α oznacza dowolną liczbę dodatnią mniejszą od 2, to $|a_n - a_m| > \alpha$ dla wszystkich tych par wskaźników n_1 i m_1, dla których $n_1 + m_1 =$ liczbie nieparzystej,

gdyż w tym przypadku $|a_{n_1} - a_{m_1}| = 2$; ciąg granicy nie posiada.

Drugi przykład: $a_n = (-1)^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$; $a_{2p} - a_{2q+1} =$

$$= |a_{2p} - a_{2q+1}| = \left(1 - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{q+1}\right)^2 > 2 - \frac{2}{p+\frac{1}{2}} - \frac{2}{q+1}$$

jeżeli $p > 4$ i $q > 4$, to $|a_{2p} - a_{2q+1}| > 1$, skąd wniosek, że ciąg granicy nie posiada.

24. Jeżeli nieskończenie wiele wyrazów ciągu równa się jednej i tej samej liczbie a i jeśli ciąg zmierza do granicy g, to $g = a$.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Niech $g \neq a$; począwszy od n_0, t. j. dla $n > n_0$ jest $|a_n - g| < \varepsilon$; wybierzmy z pośród wskaźników większych od n_0 wskaźnik n_1, któremu odpowiada wyraz a_{n_1} równy a, co jest, oczywiście, możliwe, bo gdyby takich wskaźników n_1 większych od n_0 nie było, to liczba wyrazów ciągu, równych a byłaby skończona, wbrew założeniu; otrzymamy $|a_{n_1} - g| = |a - g| < \varepsilon$, gdzie ε dowolnie mała liczba dodatnia; wystarczy wziąć $\varepsilon = |a - g|$, by sprzeczność uwidocznić.

25. *Jednoznaczność granicy*. Ciąg może nie posiadać granicy, lecz jeśli posiada, to tylko jedną.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Niech dwie liczby g i g_1, przyczem $g \neq g_1$, będą granicami jednego i tego samego ciągu: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Liczba g jest granicą, to znaczy, iż liczbie dodatniej ε odpowiada wskaźnik n_0, taki, że nierówność $n > n_0$ pociąga nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$; liczba g_1 jest granicą, więc, o ile $n > n_2$, to $|a_n - g_1| < \varepsilon$. Niech υ oznacza większą z dwóch liczb n_0 i n_1; dla $n > \upsilon$ spełnione są obie nierówności $|a_n - g| < \varepsilon$ i $|a_n - g_1| < \varepsilon$; lecz $g - g_1 = (g - a_n) + (a_n - g_1)$; przechodząc do wartości bezwzględnych, otrzymamy:

$|g-g_1| \leqslant |g-a_n| + |g_1 - a_n|$, czyli dla $n > \upsilon$, $|g-g_1| < 2\varepsilon$; wystarczy wybrać $\varepsilon = \frac{1}{2}|g-g_1|$, by sprzeczność uwidocznić.

Ciąg, który posiada granicę, nazywamy zbieżnym. Ciąg, który nie posiąda granicy lub zmierza do $+\infty$ lub do $-\infty$, nazywamy rozbieżnym.

26. *O ciągach, utworzonych z wyrazów ciągu danego.* Wyjaśnijmy, co znaczy utworzyć ciąg z wyrazów ciągu:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{4}$$

Utwórzmy ciąg:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{5}$$

w następujący sposób: u_1 wybieramy zupełnie dowolnie z pośród wyrazów ciągu (4); niech, np., $u_1 = a_{k_1}$; u_2 wybieramy z pośród pozostałych wyrazów ciągu (4) po odrzuceniu wyrazu $a_{k_1} = u_1$; niech $u_2 = a_{k_2}$; u_3 wybieramy z pośród pozostałych wyrazów ciągu (4) po odrzuceniu wyrazów $a_{k_1} = u_1$ i $a_{k_2} = u_2$ i t. d. W ten sposób żaden wyraz ciągu (4) nie może być wzięty dwa razy. By powstał ciąg nieograniczony (5) musimy wybierać wyrazy według pewnego prawa, lecz prawo to musi być tego rodzaju, by żaden wyraz nie był wzięty dwa razy, zgodnie z tylko co podanem wyjaśnieniem. Jeżeli to zastrzeżenie będzie spełnione, to w ciągu (5) mogą być wyrazy równe, (t. j. równe jednej i tej samej liczbie), tylko w tym przypadku, gdy i w ciągu pierwotnym (4) są wyrazy równe.

Ciąg, utworzony z wyrazów ciągu zbieżnego jest zbieżny i zmierza do tej samej granicy.

Ponieważ ciąg (4) zmierza do g, więc nierówność $|a_n - g| \geqslant \alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą dodatnią, może być spełniona tylko dla skończonej liczby wyrazów a_n, natomiast „prawie“ *) zawsze zachodzi nierówność przeciwna.

---

*) Wyrazu „prawie“ używamy zawsze w znaczeniu, które zostało poprzednio ściśle określone.

Zbadajmy teraz nierówność

$$|u_m - g| \geqslant \alpha \qquad (6)$$

Ponieważ wyrazy u_m zostały wybrane z pośród wyrazów a_n ciągu (4), więc nierówność (6) może być spełniona także tylko dla niektórych wartości wskaźnika m; „prawie“ zawsze więc musi być spełniona nierówność przeciwna

$$|u_n - g| < \alpha,$$

a zatem $$u_n \to g.$$

Rozumowanie powyższe stosuje się i w tym przypadku, gdy wyrazy ciągu (5) wyczerpują wszystkie wyrazy ciągu (4), t. j. gdy każdy wyraz a_n ciągu (4) został włączony w skład ciągu (5). Mówimy wtedy, że ciągi (4) i (5) różnią się tylko porządkiem.

Jeżeli zmienimy porządek wyrazów ciągu zbieżnego, to otrzymamy nowy ciąg zbieżny, który będzie zmierzał do tej samej granicy.

27. Podamy teraz szereg własności, których dowód jest bardzo łatwy i które wynikają odrazu z określenia granicy.

Jeżeli $a_n \to g$, to $|a_n| \to |g|$;

dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$$||a_n| - |g|| \leqslant |a_n - g|.$$

Jeżeli $a_n \to g$, to $-c_n \to -g$;

dla dowodu wystarczy zauważyć, że:

$$|-a_n - (-g)| = |a_n - g|.$$

Jeżeli $a_n \to \infty$, to $\frac{1}{a_n} \to 0$.

W rzeczy samej, dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, nierówność $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ spełniona jest „prawie“ zawsze, a więc „prawie“ zawsze spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ co dowodzi, że } \frac{1}{a_n} \to 0.$$

Jeżeli $a_n \to -\infty$, to $\frac{1}{a_n} \to 0$.

W rzeczy samej, $-a_n \to +\infty$, a więc $\frac{1}{-a_n} \to 0$, ale w takim razie i $\frac{1}{|a_n|} \to 0$ i $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe.

Naprzykład: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, lecz $\frac{1}{a_n}$ nie dąży ani do $+\infty$, ani do $-\infty$.

Jeżeli $a_n \to g$, $b_m \to g'$, i jeżeli $g > g'$, to „prawie" zawsze $a_n > b_n$.

Ponieważ $a_n \to g$, to „prawie" zawsze $a_n > g - \varepsilon$; ponieważ $b_m \to g'$, to „prawie" zawsze $b_n < g' + \varepsilon$. Istnieje więc taki wskaźnik υ, że dla $n > \upsilon$ obie powyższe nierówności $b_n < g' + \varepsilon$ i $a_n > g - \varepsilon$ są spełnione; jeśli $\varepsilon < \frac{1}{2}(g - g')$, to $g' + \varepsilon < g - \varepsilon$; a więc $b_n < g' + \varepsilon < g - \varepsilon < a_n$, to jest $b_n < a_n$.

Jeżeli „prawie" zawsze $a_n > b_n$, i jeżeli $a_n \to g$, $b_n \to g'$, to $g \geqslant g'$, czyli $\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty} b_n$. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

Wnioski: jeżeli $a_n \to g$ i $g > 0$, to „prawie" zawsze $a_n > 0$; jeżeli „prawie" zawsze $a_n > 0$ i jeżeli $a_n \to g$, to $g \geqslant 0$; jeżeli $a_n \to g$ i $g < 0$, to „prawie" zawsze $a_n < 0$; jeżeli „prawie" zawsze $a_n < 0$ i jeżeli $a_n \to g$, to $g \leqslant 0$; jeżeli w ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ nieskończenie wiele wyrazów jest dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych i jeżeli $a_n \to g$, to $g = 0$.

Jeżeli „prawie" zawsze $a_n < b_n < c_n$, i jeżeli $a_n \to g$, $b_n \to g'$, $c_n \to g''$, to $g \leqslant g' \leqslant g''$.

Jeżeli „prawie" zawsze $a_n < b_n < c_n$ i jeżeli $a_n \to 0$, $c_n \to 0$, to i $b_n \to 0$. W rzeczy samej, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ „prawie" zawsze $|a_n| < \varepsilon$ i $|c_n| < \varepsilon$, a więc także „prawie" zawsze $|b_n| < \varepsilon$, co dowodzi, że $b_n \to 0$.

Jeżeli „prawie" zawsze $a_n < b_n < c_n$ i jeżeli $a_n \to g$,

$c_n \to g$, to $b_n \to g$. Stosujemy poprzednie twierdzenie do $a_n - g < b_n - g < c_n - g$; ponieważ $(a_n - g) \to 0$, $(c_n - g) \to 0$, to i $(b_n - g) \to 0$, skąd $b_n \to g$.

Jeżeli „prawie" zawsze $a_n < b_n < c_n$, jeżeli $b_n \to g$ i jeżeli $(c_n - a_n) \to 0$, to $a_n \to g$, $c_n \to g$. W rzeczy samej, $c_n - g = c_n - b_n + b_n - g = (c_n - b_n) + (b_n - g)$, $|c_n - g| \leqslant \leqslant |c_n - b_n| + |b_n - g| < |c_n - a_n| + |b_n - g|$; ponieważ „prawie" zawsze $|c_n - a_n| < \varepsilon$, $|b_n - g| < \varepsilon$ na mocy założenia, więc „prawie" zawsze $|c_n - g| < 2\varepsilon$, skąd $c_n \to g$.

28. *Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.*

Jeżeli $a_n \to 0$, to $k a_n \to 0$, gdzie k jest liczbą stałą. Albo inaczej; jeżeli ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ dąży do zera, to ciąg $k a_1, k a_2, k a_3, \ldots, k a_n, \ldots$ także dąży do zera. W rzeczy samej, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, nierówność

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

jest spełniona „prawie" zawsze. Stąd wynika, że nierówność

$$|k a_n| < \varepsilon$$

jest także spełniona „prawie" zawsze; a więc $k a_n \to 0$.

Jeżeli więc wyrazy ciągu, dążącego do zera, pomnożymy przez tę samą liczbę k, to granicą nowego ciągu będzie również zero.

Jeżeli $a_n \to g$, $b_n \to g'$, to $a_n + b_n \to g + g'$; albo inaczej: jeżeli ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ zmierza do granicy g, a ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ zmierza do granicy g', to ciąg $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n, \ldots$ zmierza do granicy $g + g'$.

Z założenia wynika, że nierówność $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ jest spełniona „prawie" zawsze, t. j. dla $n > \mu$, a nierówność $|b_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2}$ także „prawie" zawsze, t. j. dla $n > \nu$; niech n_0 oznacza większą z dwóch liczb μ i ν. Jeżeli $n > n_0$, to obie po-

przednio napisane nierówności będą spełnione. Na zasadzie twierdzenia o sumie wartości bezwzględnych możemy napisać:

$$|(a_n - g) + (b_n - g')| \leqslant |a_n - g| + |b_n - g'| < \varepsilon,$$

albo inaczej

$$|(a_n + b_n) - (g + g')| < \varepsilon,$$

skoro tylko $n > n_0$, t. j. „prawie" zawsze; a więc

$$(a_n + b_n) \to g + g',$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

A zatem granica sumy równa się sumie granic, założywszy oczywiście, że składniki granicę posiadają.

W podobny sposób udowodnić można, że $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$; zresztą wynika to wprost z poprzedniego, bo $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} \{a_n + (-b_n)\} = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} (-b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$, o ile te granice istnieją.

Stąd wniosek: jeżeli $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$, to $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

Jeżeli $a_n \to 0$, a $|b_n| < M$ dla każdego n, to $a_n b_n \to 0$, t. j. jeżeli ciąg

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

zmierza do zera, a ciąg

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

jest ograniczony od góry i od dołu, to ciąg

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n, \ldots$$

utworzony z iloczynów odpowiednich wyrazów dwóch danych ciągów, zmierza także do zera.

W rzeczy samej, nierówność $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ zachodzi „prawie" zawsze, nierówność zaś $|b_n| < M$ dla każdej wartości n, ztąd wynika, że nierówność

$$|a_n . b_n| < \frac{\varepsilon}{M} . M, \text{ czyli } |a_n . b_n| < \varepsilon$$

jest spełniona „prawie“ zawsze, co oznacza, że granicą $a_n . b_n$ jest istotnie zero.

Jeżeli $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$, to $a_n b_n \to 0$. Dowód podobny do poprzedniego.

Jeżeli $a_n \to g$, $b_n \to g'$, to $a_n . b_n \to g . g'$, t. j., jeżeli ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ dąży do granicy g, a ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ zmierza do granicy g', to ciąg $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n, \ldots$ zmierza do granicy $g g'$.

Możemy napisać $a_n = g + u_n$, $b_n = g' + v_n$, gdzie $u_n = a_n - g$ i $v_n = b_n - g'$ na mocy założenia zmierzają do zera;

$$a_n b_n = g g' + g v_n + g' u_n + u_n v_n$$

$$a_n b_n - g g' = g v_n + g' u_n + u_n v_n,$$

lecz $\lim\limits_{n \to \infty} (g v_n + g' u_n + u_n v_n) = \lim\limits_{n \to \infty} g v_n + \lim\limits_{n \to \infty} g' u_n + \lim\limits_{n \to \infty} u_n v_n = 0$; tak więc $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n - g g') = 0$, skąd $\lim a_n b_n = g g'$, co piszemy także $a_n b_n \to g g'$.

A zatem granica iloczynu równa się iloczynowi granic, przy założeniu, że granice czynników istnieją.

Ćwiczenie. Udowodnić to samo twierdzenie bezpośrednio przez badanie różnicy $a_n b_n - g g'$.

Wniosek. Jeżeli $a_n \to g$, to $k a_n \to k g$; wynika to z poprzedniego, przy założeniu, że $b_n = k$ dla każdego n; k jest liczbą stałą.

Jeżeli $a_n \to g$, przyczem $g \neq 0$, to $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{g}$, t. j. jeżeli ciąg $a_1, a_1, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ dąży do granicy $g \neq 0$, to ciąg utworzony z liczb odwrotnych $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n} \ldots$ zmierza do granicy $\frac{1}{g}$.

Ponieważ $g \neq 0$, to od pewnego miejsca, t. j. dla $n > n_0$ żaden z wyrazów a_n nie równa się zeru; jeżeli dla $n \leqslant n_0$,

zdarzy się, że $a_n = 0$, to odpowiadający mu wyraz w ciągu drugim opuszczamy; opuszczonych miejsc będzie liczba skończona.

Ponieważ $a_n \rightarrow g$, to dla $n > \mu$,

$$|u_n| = |a_n - g| < \frac{|g|}{2}, \text{ czyli } \tfrac{1}{2}|g| < |a_n| < \tfrac{3}{2}|g|,$$

skąd
$$\tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{|g|} < \frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|g|};$$

zauważmy, że
$$\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{a_n}\right| = \frac{|a_n - g|}{|g| \cdot |a_n|} = \frac{|u_n|}{|g| \cdot |a_n|},$$

a więc
$$\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{a_n}\right| < \frac{|u_n|}{|g|} \cdot \frac{2}{|g|} = \frac{2\,|u_n|}{|g|^2};$$

ponieważ $u_n = a_n - g \rightarrow 0$, więc istnieje taka liczba υ, że dla $n > \upsilon$, $|u_n| < \frac{1}{2}|g|^2 . \varepsilon$; jeżeli teraz n_0 oznacza większą z dwóch liczb μ i υ, to dla $n > n_0$

$$\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{a_n}\right| < \tfrac{1}{2}|g|^2 . \varepsilon . \frac{2}{|g|^2} = \varepsilon,$$

czyli „prawie“ zawsze $\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$, a więc $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{g}$;

albo inaczej $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$, o ile $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n$ istnieje i nie równa się zeru.*)

Jeżeli $a_n \rightarrow g$, $b_n \rightarrow g' \neq 0$, to $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{g}{g'}$, t. j. jeżeli ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ dąży do granicy g, a ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ do granicy g' przyczem $g' \neq 0$, to ciąg ilorazów $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ zmierza ku granicy $\frac{g}{g'}$.

Istotnie: $\frac{a_n}{b_n} = a_n . \frac{1}{b_n}$; $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \rightarrow \infty} \left(a_n . \frac{1}{b_n}\right) =$

$= \lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n . \lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n . \frac{1}{\lim\limits_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{g}{g'}$. A zatem

---

*) Zamiast $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n$ będziemy czasami pisali wprost $\lim a_n$, o ile to nie pociąga dwuznaczności.

granica ilorazu równa się ilorazowi granic, o ile granice dzielnej i dzielnika istnieją i ta druga granica nie równa się zeru.

Łącząc twierdzenia o granicy sumy, iloczynu i t. d., możemy otrzymać bardziej złożone wyniki; tak, np. o ile $a_n \to g$, $b_n \to g'$, $c_n \to g''$, to $(a_n + b_n)c_n \to (g+g')g''$. W ten sposób dojdziemy do następującego ogólniejszego twierdzenia o granicach:

Jeżeli $a_n \to g$, $b_n \to g'$, $c_n \to g''$, to $R(a_n, b_n, c_n) \to$ $\to R(g, g', g'')$, gdzie $R(x, y, z)$ oznacza funkcję wymierną, t. j. iloraz dwóch wielomianów względem x, y i z, przyczem twierdzenie się stosuje o ile mianownik w wyrażeniu $R(a_n, b_n, c_n)$ nie zdąża do zera.

Oczywiście, zamiast trzech ciągów i trzech granic, mogłoby ich być więcej, byle tylko liczba skończona.

Przykłady: Znaleźć granicę wyrażenia $\dfrac{n^3+5n^2+7}{2n^3+10n-5}$, gdy $n \to \infty$.

$$\frac{n^3+5n^2+7}{2n^3+10n-5} = \frac{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{7}{n^3}}{2+\dfrac{10}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}};$$ w danym wypadku mamy do czynienia z funkcją typu:

$$R\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}\right);$$

granice zmiennych $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ równają się zeru; tu $R(0,0,0)=\frac{1}{2}$,

a więc $$\frac{n^3+5n^2+7}{2n^3+10n-5} \to \tfrac{1}{2}.$$

Znaleźć granicę wyrażenia

$$\frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + A_2 n^{p-2} + \ldots + A_{p-1} n + A_p}{B_0 n^p + B_1 n^{p-1} + B_2 n^{p-2} + \ldots + B_{p-1} n + B_p},$$

tj. ilorazu dwóch wielomianów stopnia p względem n, przyczem $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ są spółczynnikami liczbowemi; $B_0 \neq 0$.

Mamy tu $R\left(\frac{1}{n}\right)=\dfrac{A_0+A_1\frac{1}{n}+A_2\frac{1}{n^2}+\dots}{B_0+B_1\frac{1}{n}+B_2\frac{1}{n^2}+\dots}$

$$\lim R\left(\frac{1}{n}\right)=R(0)=\frac{A_0}{B_0};$$

tak więc $\dfrac{A_0n^p+A_1n^{p-1}+\dots+A_{p-1}n+A_p}{B_0n^p+B_1n^{p-1}+\dots+B_{p-1}n+B_p}\to\dfrac{A_0}{B_0}$

Jeżeli licznik jest wielomianem stopnia niższego niż mianownik, to w poprzedniem $A_0=0$, $R(0)=0$ i granica naszego wyrażenia jest zero.

Jeżeli stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, nie możemy stosować tego samego rozumowania, gdyż przypadek $B_0=0$ jest wykluczony.

Wtedy

$$\frac{A_0n^p+A_1n^{p-1}+A_2n^{p-2}+\dots}{B_0n^q+B_1n^{q-1}+B_2n^{q-2}+\dots}=n^{p-q}\frac{A_0+A_1\frac{1}{n}+A_2\frac{1}{n^2}+\dots}{B_0+B_1\frac{1}{n}+B_2\frac{1}{n^2}+\dots}$$

przyczem $p>q$, a $B_0\neq 0$, $A_0\neq 0$. Rozłożyliśmy nasze wyrażenie na dwa czynniki, z których pierwszy n^{p-q} dąży do nieskończoności, a drugi zmierza do $\dfrac{A_0}{B_0}\neq 0$; stąd bardzo łatwy już wniosek, że nasze wyrażenie dąży do nieskończoności.

29. Zbadajmy jeszcze ciąg (postęp geometryczny):

$$x,\ x^2,\ x^3,\dots,\ x^n,\dots$$

Rozróżnimy kilka przypadków:

1^0 $x>1$. W takim razie ciąg rośnie nieograniczenie, czyli $x^n\to\infty$, gdy $n\to\infty$. Udowodnimy, że począwszy od pewnego miejsca wyrazy jego są wszystkie większe od dowolnie wielkiej liczby M.

Niech $\quad x=1+d$, gdzie $d>0$;

$$x^n = (1+d)^n = 1 + nd + \frac{n(n-1)}{2} d^2 + \ldots + nd^{n-1} + d^n >$$

$> 1 + nd$, ponieważ wszystkie składniki poprzedniej sumy są dodatnie; tak więc $x^n > 1 + nd$, gdzie $d = x - 1 > 0$; jeżeli teraz $n > \frac{M-1}{d}$, to $1 + nd > M$; a więc tem bardziej $x^n > M$, t. j. $x^n \to \infty$, bo „prawie" wszystkie wyrazy naszego ciągu są w tym przypadku większe od dowolnie wielkiej liczby M.

2^0 $x = 1$; wtedy $x^n = 1$; wszystkie wyrazy ciągu równe są jedności, a więc $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 1$.

3^0 $0 < x < 1$. Wprowadźmy liczbę odwrotną $y = \frac{1}{x}$; $y > 1$; w takim razie $x^n = \frac{1}{y^n}$, lecz $y_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$, a więc $\frac{1}{y^n} \to 0$, t. j. $x^n \to 0$.

4^0 $x = 0$; wtedy $x^n = 0$, wszystkie wyrazy ciągu równe są zeru, $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$.

5^0 $-1 < x < 0$. Wprowadźmy liczbę przeciwną $y = -x$; wtedy $0 < y < 1$, $x^n = (-1)^n . y^n$; ale $y^n \to 0$, więc $|x^n| = |y^n|$ również zmierza do zera, a zatem $x^n \to 0$.

6^0 $x < -1$. Wprowadźmy liczbę przeciwną $y = -x$, wtedy $y > 1$, $y^n \to \infty$, $x^n = (-1)^n y^n$; ciąg częściowy, utworzony z wyrazów parzystych, dąży do $+\infty$; ciąg częściowy, utworzony z wyrazów nieparzystych, dąży do $-\infty$; w rzeczy samej, jeżeli $n = 2p$, to $x^{2p} = y^{2p}$ i $x^{2p} \to \infty$, gdy $p \to \infty$; jeżeli $n = 2p + 1$, to $x^{2p+1} = -y^{2p+1}$, $x^{2p+1} \to -\infty$, gdy $p \to \infty$. Nasz ciąg w tym wypadku granicy nie posiada; ciąg, jak mówią niektórzy, wykonywa wahania nieskończone.

7^0 $x = -1$, wtedy $x^n = (-1)^n$, $x^{2p} = 1$, $x^{2p+1} = -1$,

wyrazy są kolejno $+1$ i -1; jest to ciąg o którym mowa była poprzednio (l. 23). Granicy nie posiada.

Otrzymane wyniki dadzą się streścić przy pomocy następującej tablicy:

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$	niema	niema	0	0	0	1	niema
x^n	wykonywa wahania nieskończone	wykonywa wahania skończone	$\to 0$	$\to 0$	$\to 0$	$\to 1$	$\to +\infty$

30. *Ciąg monotoniczny ograniczony.*

Założenie: ciąg jest niemalejący i ograniczony od góry albo nierosnący i ograniczony od dołu, czyli

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$ i

$a_n < M$ dla każdego n; albo

2) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$ i

$a_n > m$ dla każdego wskaźnika n.

Wniosek (teza): ciąg jest zbieżny, t. j. $\lim a_n$ istnieje.

Ponieważ oba zawarte w tem wysłowieniu twierdzenia można udowodnić w sposób zupełnie podobny, podamy tu dowód tylko dla ciągu niemalejącego, t. j. przy założeniu: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$; $a_n < M$.

Podzielmy wszystkie liczby rzeczywiste x na dwie klasy; do klasy niższej zaliczymy każdą liczbę x_I, która albo jest równa jakiemuś wyrazowi naszego ciągu albo mniejsza przynajmniej od jednego wyrazu ciągu, t. j. jeżeli $x = x_I$, to musi istnieć taki wskaźnik k, że

$$x_I \leqslant a_k;$$

do klasy drugiej zaliczymy każdą liczbę x_{II}, nie czyniącą zadość tylko co wysłowionemu warunkowi, t. j. większą od wszystkich wyrazów ciągu, czyli

$$x_{II} > a_n, \text{ (dla każdego wskaźnika } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ten podział na dwie klasy jest przekrojem w dziedzinie liczb rzeczywistych, bo:

1° Każda liczba rzeczywista x należy bądź do klasy pierwszej, bądź do klasy drugiej.

2° Żadna z dwóch klas nie jest pusta, gdyż, np. liczba a_1 należy do pierwszej klasy, liczba M do drugiej.

3° Każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy; jeżeli x_I jest dowolną liczbą pierwszej klasy, to, na mocy określenia tej klasy, istnieje wyraz a_k, taki, że $x_I \leqslant a_k$; jeżeli x_{II} jest dowolną liczbą drugiej klasy, to $x_{II} > a_k$, bo tego rodzaju nierówność jest spełniona przy wszystkich wartościach wskaźnika; z zestawienia tych dwóch nierówności wynika:

$$x_I < x_{II}$$

Przekrój ten, jak każdy przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych, wyznacza pewną określoną liczbę g, która jest, jak wiemy, albo największą liczbą pierwszej klasy, albo najmniejszą liczbą drugiej. Ta liczba g właśnie jest granicą ciągu. W rzeczy samej, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, $g-\varepsilon$ należy do klasy pierwszej, a $g+\varepsilon$ do klasy drugiej, wskutek czego, jak było wyjaśnione przed chwilą, musi istnieć wyraz a_{n_0} naszego ciągu, spełniający nierówność:

$$g-\varepsilon \leqslant a_{n_0} < g+\varepsilon;$$

jeżeli $n > n_0$, to $a_{n_0} \leqslant a_n$, lecz zawsze $a_n < g+\varepsilon$, wskutek czego

$$g-\varepsilon \leqslant a_{n_0} \leqslant a_n < g+\varepsilon,$$

czyli $|g-a_n| \leqslant \varepsilon$ „prawie“ zawsze, to jest dla każdego n większego, od n_0. A więc $a_n \to g$. Jasna rzecz, że żaden wyraz ciągu nie może przewyższać liczby g, tak, że nierówność $a_n < g+\varepsilon$ można zastąpić przez $a_n \leqslant g$, a nawet przez nierówność $a_n < g$, o ile w ciągu niema nieskończenie wiele liczb równych między sobą (a więc równych g); w rzeczy samej, gdyby $a_k = g$, to i $a_{k+1} = g$; nie może bowiem być

$a_{k+1} < g = a_k$, bo ciąg jest niemalejący; nie może być także $a_{k+1} > g$, bo a_{k+1} należy do klasy pierwszej, a liczby klasy pierwszej nie mogą być większe od g. Jeżeli więc $a_k = g$, to i wszystkie następne wyrazy ciągu, czyli „prawie“ wszystkie równają się g; w tym przypadku szczególnym liczba g należy do klasy niższej naszego przekroju.

Dla ciągu niemalejącego jest zatem zawsze $a_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, jeżeli zaś ciąg jest stale rosnący, to $a_n < \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Jeżeli ciąg monotoniczny nie jest ograniczony od góry, co może się zdarzyć tylko przy ciągu monotoniczuym nie malejącym, to $a_n \to \infty$. Istotnie, wedle założenia, niema takiej liczby M, która byłaby większa od wszystkich wyrazów ciągu; dla każdej liczby M można znaleźć wskaźnik n_0, taki, że

$$a_{n_0} > M;$$

jeżeli $n > n_0$, to $a_n \geqslant a_{n_0} > M$; a więc „prawie“ wszystkie wyrazy ciągu są od dowolnie wielkiej liczby M większe; dowodzi to, że ciąg dąży do $+\infty$.

Jeżeli ciąg monotoniczny (oczywiście nie rosnący) nie jest ograniczony od dołu, w takim razie dąży do $-\infty$, czyli $a_n \to -\infty$.

31. *Przykład:* $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Przy pomocy tylko co uzasadnionych twierdzeń możemy udowodnić, że ciąg:

$$2, \tfrac{9}{4}, \tfrac{64}{27}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

zmierza do granicy.

Udowodnimy przedewszystkiem, że ten ciąg jest rosnący.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,.\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1}{1.2}\,.\,\frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}\,.\,\frac{1}{n^p} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-1).n}\,.\,\frac{1}{n^n};$$

jest to wzór Newtona, rozwinięcie n^{ej} potęgi dwumianu, dla n całkowitego dodatniego. Przy pomocy elementarnych przekształceń otrzymamy:

$$a_n = 1 + 1 + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \qquad (7)$$
$$\ldots + \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

$p!$ oznacza $1.2.3\ldots p$, t. j. iloczyn p kolejnych liczb szeregu naturalnego; $n! = 1.2.3\ldots n$.

Otrzymaliśmy na a_n sumę $n+1$ składników dodatnich. Przypuśćmy, że rozwinęliśmy zupełnie w ten sam sposób następny wyraz ciągu, t. j. a_{n+1}; można to rozwinięcie otrzymać odrazu, zastępując w ostatnim wzorze n przez $n+1$. Nowa suma składać się będzie z $n+2$ składników *dodatnich;* dwa pierwsze składniki pozostaną bez zmiany, wszystkie następne składniki powiększą się; np. składnik $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ zostanie zastąpiony przez składnik większy $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ i t. d.; ponadto przybędzie jeden nowy składnik; widzimy więc, że suma, wyrażająca $(n+1)$szy wyraz ciągu, jest większa od sumy, wyrażającej n-ty wyraz; a zatem:

$$a_{n+1} > a_n;$$

nasz ciąg jest rosnący.

Dwie są możliwości: albo ciąg rośnie nieograniczenie, albo jest ograniczony od góry i posiada granicę. Przekonamy się, że zachodzi tutaj druga ewentualność: liczba 3 jest większa od wszystkich wyrazów ciągu. W wyrażeniu (7) każdy z czynników $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ jest mniejszy od jedności; gdy więc te czynniki we wzorze (7) zastąpimy przez jedność, to suma się powiększy, a więc

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ czyli } a_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

Ciąg jest zatem rosnący, bo $a_{n+1} > a_n$ i ograniczony od góry, bo dla każdego n jest $a_n < 3$, t. j. wszystkie wyrazy są mniejsze od 3. Ciąg zmierza więc do granicy; granicę tę przyjęto oznaczać liczbą e; jest to liczba przestępna. Można byłoby liczbę e obliczyć w sposób przybliżony z dowolną dokładnością przy pomocy naszego ciągu, którego wyrazy są wartościami przybliżonemi liczby e z niedomiarem, lecz musielibyśmy wprzód utworzyć inny ciąg, malejący, któryby zdążał do tej samej granicy; wyrazy tego drugiego ciągu byłyby większe od e. Taki ciąg utworzymy*), zastępując n przez $-n$ w wyrazie ogólnym naszego ciągu; wyraz ogólny nowego ciągu niech będzie $b_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} =$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \left(1 + \frac{1}{n}\right); \text{ a więc } \lim_{n \to \infty} b_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Lecz obliczenie wartości przybliżonych liczby e tą drogą jest w praktyce niewykonalne, gdyż otrzymane ciągi są bardzo wolno zbieżne; przypuśćmy, np., że chcemy obliczyć e z dokładnością do $\frac{1}{10^k}$; w takim razie $b_n - a_n < \frac{1}{10^k}$ ponieważ $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, więc $b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n$, skąd $\frac{a_n}{n} < \frac{1}{10^k}$, czyli $n > a_n 10^k$; ponieważ $n_n > e - \frac{1}{10^k}$; więc $n > e . 10^k - 1$; tak, np., by obliczyć e z dokładnością do

---

*) Patrz ćwiczenie N. 36.

$\frac{1}{100}$, to n w $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ należy wziąć większe od 270. To też do obliczenia e służą inne metody, o których będzie mowa później.

Udowodniliśmy mimochodem, że nie tylko

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, ale także $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, przyczem $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oznacza poprostu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$. Dokładniejsze metody dają: $e=2{,}718281828459045......$

Jako zastosowanie teorji granic, udowodnijmy jeszcze, dla przykładu, że $\frac{a^n}{n}\to\infty$, gdy $n\to\infty$, dla $a>1$.

W rzeczy samej:

$$a=1+d,\ \text{gdzie}\ d>0;\ a^n=(1+d)^n>\frac{n(n-1)}{2}d^2$$

$$\frac{a^n}{n}>\frac{(n-1)}{2}d^2;\ \text{gdy}\ n\to\infty,\ \frac{(n-1)}{2}d^2\to\infty,\ \text{a więc i}\ \frac{a^n}{n}\to\infty\text{*)}.$$

32. Granica jest liczbą, wyznaczoną przez nieskończony zbiór liczb danego ciągu. Granica zależy więc od liczb danego ciągu, ale zależność ta jest specjalnego rodzaju, mianowicie granica nie zależy od poszczególnych liczb ciągu, nie zależy od skończonej ilości tych liczb; w ciągu możemy usunąć skończoną liczbę wyrazów, możemy dołączyć skończoną liczbę wyrazów, wreszcie wykonać obie te czynności jedna po drugiej, t. j. zastąpić skończoną liczbę wyrazów ciągu innemi liczbami, nie wpłynie to na granicę, o ile ciąg jest zbieżny; jeśli te zmiany przeprowadzimy w ciągu rozbieżnym, to i nowo otrzymany ciąg będzie rozbieżny. Granica zależy od nieskończonej liczby wyrazów ciągu; zmiana nieskończonej liczby wyrazów może mieć wpływ na granicę; naprzykład, w ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,$

---

*) W ten sam sposób można byłoby udowodnić, że $\frac{a^n}{n^p}\to\infty$, gdy $n\to\infty$, gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią stałą.

$\frac{n-1}{n}$,..., który zmierza do jedności, zastąpmy każdy setny wyraz zerem; nowo otrzymany ciąg już nie jest zbieżny.

Aby uchwycić dlaczego tak jest, zauważymy, że granica jest określona przez pewne warunki (nierówności $|a_n - g| < \varepsilon$), które powinny być spełnione „prawie" zawsze, t. j. dla wszystkich wyrazów począwszy od pewnego wskaźnika. Otóż zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu na te warunki niema żadnego wpływu, gdyż przy zmianie skończonej liczby wyrazów, zacząwszy od pewnego wskaźnika żaden wyraz nie uległ zmianie, a więc, począwszy od tego wskaźnika te same warunki (nierówności $|a_n - g| < \varepsilon$) pozostają spełnione, czyli granica się nie zmieniła. Inaczej przy zmianie nieskończonej liczby wyrazów; jakkolwiek wielką jest liczba n_0, istnieją wyrazy a_n o wskaźniku n większym od n_0, które uległy zmianie.

Uogólnienie pojęcia granicy.

Pewne pojęcia z teorji mnogości.

33. *Moc zbioru.* Pojęcia zbioru czyli mnogości określać nie będziemy, gdyż jest to pojęcie pierwotne, nie dające się sprowadzić do pojęć prostszych, bardziej zrozumiałych. Zajmować się będziemy przeważnie zbiorami liczb lub punktów; liczby lub ewentualnie punkty, z których zbiór się składa, będziemy nazywali jego elementami.

Przykłady mnogości: 1) zbiór liczb całkowitych dodatnich; 2) zbiór liczb wymiernych; 3) zbiór liczb rzeczywistych; 4) zbiór liczb wymiernych, zawartych w pewnym przedziale, np. w przedziale $(0,1)$; 5) zbiór liczb rzeczywistych, zawartych w pewnym przedziale, np. w przedziale $(0,1)$; 6) zbiór liczb będących wyrazami danego ciągu, np. ciągu, którego wyraz ogólny $a_n = \frac{1}{n}$ i t. d.

Zbiory mogą być skończone i nieskończone. Zbiór jest nieskończony, jeśli zawiera więcej niż n elementów różnych, jakkolwiek wielką jest liczba całkowita dodatnia n. Ciąg będziemy uważali za zbiór wyrazów tego ciągu; tak, np., ciąg $a_n = (-1)^n$, zawiera dwie tylko liczby $+1$ i -1, ale jako ciąg, jest zbiorem nieskończonym wyrazów, z których każdy odpowiada pewnej liczbie szeregu naturalnego $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Wśród elementów zbioru skończonego liczb musi być, oczywiście, liczba największa i liczba najmniejsza. Natomiast zbiory nieskończone liczb mogą nie zawierać liczby najmniejszej (lub największej). Tak, np., śród liczb zbioru $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, t. j. śród liczb, które są wyrazami ciągu $a_n = \frac{1}{n}$, niema, oczywiście, liczby najmniejszej. Zbiór liczb wymiernych klasy niższej przekroju, wyznaczającego liczbę niewymierną, np. $\sqrt{2}$, jest zbiorem nie zawierającym liczby największej.

Gdy dany jest zbiór skończony, możemy jego elementy policzyć; dla zbioru nieskończonego pojęcie liczebności jest niezrozumiałe, gdyż wszystkich elementów jego przeliczyć nie można. Jednakowoż istnieje pojęcie ogólniejsze, które obejmuje pojęcie liczby dla zbioru skończonego, ale stosuje się także i do zbiorów nieskończonych; jest to pojęcie „mocy“, a właściwie równej mocy. Aby łatwiej dojść do tego pojęcia, zastanówmy się nad tem, co znaczy orzeczenie, że dwa zbiory skończone zawierają jednakową liczbę elementów; to znaczy, że między elementami obu zbiorów można ustalić odpowiedniość doskonałą, t. j. taką, że każdemu elementowi pierwszego zbioru odpowiada jeden tylko element drugiego zbioru i odwrotnie, każdemu elementowi drugiego jeden tylko element pierwszego. Policzyć pewien

zbiór skończony, jest to ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami tego zbioru, a elementami zbioru skończonego, utworzonego z kolejnych liczb szeregu naturalnego, dajmy na to od 1 do n. Taką odpowiedniość doskonałą można ustalić niekiedy między elementami dwóch zbiorów nieskończonych; mówimy wtedy, że są jednakowej „mocy".

Określenie. Dwa zbiory są równej „mocy", kiedy między ich elementami można ustalić odpowiedniość doskonałą.

Dwa zbiory równej mocy z trzecim są, oczywiście, także równej mocy (przechodniość).

Przykłady. Porównajmy dwa następujące zbiory liczb:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots \qquad (8)$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots \qquad (9)$$

Są one równej mocy; każdej liczbie n zbioru (8) odpowiada liczba $2n$ zbioru (9), każdej zaś liczbie m zbioru (9) odpowiada liczba $\frac{m}{2}$ zbioru (8). Są one więc jednakowej mocy, chociaż pierwszy zbiór składa się ze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, a zbiór drugi zawiera tylko liczby parzyste, czyli liczby drugiego zbioru stanowią tylko część liczb zbioru pierwszego.

Jednakowej mocy są np. dwa następujące zbiory: zbiór liczb rzeczywistych przedziału (0,1) i zbiór liczb rzeczywistych przedziału (a, b); w rzeczy samej, jeśli x jest dowolną liczbą pierwszego zbioru, t. j. liczbą spełniającą warunek $0 \leqslant x \leqslant 1$, a y dowolną liczbą drugiego zbioru, t. j. spełniającą warunek $a \leqslant y \leqslant b$, to odpowiedniość doskonałą między liczbami x i y ustalimy np. przy pomocy wzoru $y = a + (b - a) . x$.

34. *Zbiory przeliczalne.* Najprostszym zbiorem nieskończonym jest zbiór liczb całkowitych dodatnich, który dany jest nam w postaci ciągu naturalnego: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Każdy zbiór, jednakowej z nim mocy, nazywamy *prze-*

liczalnym. Zbiór (Z) jest więc przeliczalny, jeśli można ustalić między jego elementami a liczbami ciągu naturalnego odpowiedniość doskonałą, wskutek czego każdy element a zbioru (Z) odpowiada pewnej liczbie ciągu naturalnego i, odwrotnie, każdej liczbie n ciągu naturalnego jest podporządkowany pewien element a naszego zbioru (Z); ten element możemy oznaczyć przez a_n; tak więc element, odpowiadający liczbie 1 będzie a_1, element, odpowiadający liczbie 2, będzie a_2 i t. d. Zbiór jest więc przeliczalny, jeżeli można jego elementy ponumerować, czyli z elementów jego utworzyć ciąg, tak, by żaden element nie został opuszczony, t. j. nie został bez wskaźnika. Każdy ciąg jest przykładem zbioru przeliczalnego i, odwrotnie, zbiór jest przeliczalny, jeżeli z jego elementów można utworzyć ciąg, tak by każdy element zbioru miał swoje określone w nim miejsce (wskaźnik).

Stąd wynika, że zbiór, utworzony z połączenia elementów dwóch zbiorów przeliczalnych, jest także przeliczalny; albowiem jeśli $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ oznaczają elementy pierwszego zbioru, a $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ elementy drugiego zbioru, to możemy zbiór, powstały z połączenia elementów tych dwóch zbiorów, napisać w postaci $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$, tak iż element u_n jest poporządkowany liczbie $2n-1$ ciągu naturalnego, a v_n liczbie $2n$. Taki sam wynik otrzymalibyśmy dla trzech, czterech, i, wogóle, dla skończonej liczbu ciągów, tak iż zbiór, który powstaje przez połączenie elementów skończonej liczby zbiorów przeliczalnych, jest przeliczalny. Co więcej, zbiór, który powstaje przez połączenie w jeden zbiór przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych, jest przeliczalny; wygodnie nam będzie przy dowodzie tego twierdzenia używać dwóch wskaźników; pierwszy będzie oznaczał, do którego zbioru dany wyraz należy, a drugi wskaźnik będzie oznaczał miejsce tego wyrazu w odpowiednim ciągu; np., wyraz

$u_{p,k}$ będzie należał do zbioru o numerze p i będzie zajmował w tym zbiorze, ustawionym w ciąg, miejsce k. Napiszmy po kolei dane zbiory, w pierwszym wierszu pierwszy, w drugim drugi i t. d.

$$\begin{array}{l} u_{1,1};\ u_{1,2};\ u_{1,3};\ u_{1,4};\ u_{1,5};\dots;\ u_{1,k};\dots \\ \quad u_{2,1};\ u_{2,2};\ u_{2,3};\ u_{2,4};\dots;\ u_{2,k-1};\dots \\ \qquad u_{3,1};\ u_{3,2};\ u_{3,3};\dots;\ u_{3,k-2};\dots \\ \qquad\quad u_{4,1};\ u_{4,2};\dots;\ u_{4,k-3};\dots \\ \qquad\qquad u_{5,1};\dots;\ u_{5,k-4};\dots \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

By podporządkować wyrazy tej tablicy kolejnym liczbom ciągu naturalnego, wystarczy ustawić je w następującym porządku:

$$u_{1,1};\ u_{1,2};\ u_{2,1};\ u_{1,3};\ u_{2,2};\ u_{3,1};\ u_{1,4};\ u_{2,3};\ u_{3,2};\ u_{4,1};\dots;$$

pierwsze miejsce zajmuje wyraz, dla którego suma wskaźników $p+q=2$, następuje grupa dwóch wyrazów, dla których $p+q=3$, potem grupa wyrazów, dla których $p+q=4$, i t. d.; w każdej zaś grupie porządkujemy wyrazy według rosnących wskaźników pierwszych. Łatwo stwierdzić, że wyraz $u_{p,k}$ zajmuje w tylko co napisanym ciągu miejsce $n=\frac{1}{2}(p+k-1)(p+k)-k+1$.

Ciąg o dwóch wskaźnikach nazywa się ciągiem podwójnym; w ciągu podwójnym każdy wyraz $u_{p,k}$ jest wyznaczony przez parę liczb całkowitych dodatnich p, k; tylko co podany dowód polegał właściwie na ustaleniu odpowiedniości doskonałej między parami liczb p, k i liczbami ciągu naturalnego. Można więc poprzednio otrzymany wynik wypowiedzieć jeszcze w sposób następujący: zbiór wszystkich par liczb całkowitych dodatnich p, k jest przeliczalny; mamy tu przykład zbioru, którego elementem nie jest liczba, lecz para liczb.

Możemy w ten sam sposób rozważać zbiór, utworzony ze wszystkich trójek liczb całkowitych dodatnich p, k, l

lub, co na jedno wychodzi, ciągi potrójne, t. j. o trzech wskaźnikach; wyrazem ogólnym takiego ciągu będzie $u_{p,k,l}$. Zbiór w ten sposób określony będzie przeliczalny. To samo się stosuje do ciągów o dowolnej, byle skończonej liczbie wskaźników.

Każdy zbiór nieskończony, który jest częścią zbioru przeliczalnego, sam jest przeliczalny. Zakładamy, że (Z) jest zbiorem przeliczalnym, a każdy element zbioru nieskończonego (Z_1) należy do (Z); elementy zbioru (Z) możemy przedstawić w postaci ciągu

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \ldots$$

Niech u_{n_1} oznacza pierwszy z kolei wyraz tego ciągu, należący do (Z_1), u_{n_2} drugi z kolei, u_{n_3} trzeci z kolei i t. d.; oczywiście $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$; ciąg $u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}, \ldots$ wyczerpuje wszystkie elementy zbioru (Z_1); zbiór (Z_1) jest więc przeliczalny.

Wniosek. Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

Możemy się ograniczyć do liczb wymiernych dodatnich; każda taka liczba jest kształtu $\frac{m}{n}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$, a zbiór wszystkich liczb powyższego kształtu jest tej samej mocy, co i zbiór wszystkich par liczb, t. j. jest przeliczalny. Każda liczba wymierna dodatnia zajmuje określone miejsce w ciągu liczb:

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}. \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{1}{5}. \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{3}, \ldots$$

Możemy z powyższego ciągu usunąć wszystkie ułamki skracalne, a zostawić tylko nieprzywiedlne (t. j. nieskracalne), otrzymamy ciąg:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}, 2, \tfrac{1}{3}, 3, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 4, \tfrac{1}{5}, \ldots,$$

utworzony ze wszystkich liczb wymiernych dodatnich; zbiór ten jest częścią poprzedniego, a więc także przeliczalny. Liczby wymierne ujemne tworzą taki sam ciąg

$-1, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -4, -\frac{1}{5}, \ldots$

Stąd już prosty wniosek, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

35. *Zbiory nieprzeliczalne.*

Zjawia się teraz pytanie, czy wszystkie zbiory nieskończone są przeliczalne. Odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Nieprzeliczalnym np. jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (a, b), czyli punktów odcinka. Ponieważ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dowolnego przedziału (a, b) jest tej samej mocy, co, np. zbiór liczb przedziału $(0, 1)$, to możemy poprzestać przy dowodzie na przedziale $(0, 1)$. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuszczamy, że zbiór liczb przedziału $(0, 1)$ jest przeliczalny; niech u_n oznacza tę liczbę przedziału $(0, 1)$, która odpowiada liczbie n; w takim razie ciąg

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n, \ldots \quad (10)$$

wyczerpuje wszystkie liczby przedziału $(0, 1)$, t. j., jeżeli $0 \leqslant x \leqslant 1$, to istnieje wskaźnik k taki, że $x = u_k$. Liczby przedziału $(0, 1)$ są więc uporządkowane dwoma sposobami, według wielkości i według kolejności w ciągu; według wielkości x poprzedza y, jeżeli $x < y$; według kolejności w ciągu x poprzedza y, jeżeli $x = u_k$, a $y = u_l$ i $k < l$. Niech u_{n_3} oznacza pierwszy z kolei wyraz naszego ciągu, zawarty co do wielkości między u_1 i u_2; niech będzie, np., $u_1 < u_2$, tak, iż $u_1 < u_{n_3} < u_2$; wyrazy, których wskaźniki są mniejsze od n_3, znajdują się poza przedziałem (u_1, u_2). Niech u_{n_4} oznacza pierwszy z kolei wyraz ciągu (10), zawarty między u_{n_3} i u_2, tak, iż $n_4 > n_3$; $u_{n_3} < u_{n_4} < u_2$; wyrazy, których wskaźniki są mniejsze od n_4 znajdują się poza przedziałem (u_{n_3}, u_2). Niech u_{n_5} oznacza pierwszy z kolei wyraz ciągu po wyrazie u_{n_4}, zawarty co do wielkości liczbowej między dwoma poprzedniemi, t. j. między u_{n_3} i u_{n_4}, tak, iż $n_5 > n_4$; $u_{n_3} < u_{n_5} < u_{n_4}$; wyrazy, których wskaźniki są

mniejsze od n_5 znajdują się poza przedziałem (u_{n_3}, u_{n_4}). W ten sam sposób określamy u_{n_6}, u_{n_7} i t. d. Tak więc u_{n_k} oznacza pierwszy z kolei numerów wyraz ciągu (10), następujący po wyrazie $u_{n_{k-1}}$ i zawarty co do wielkości między $u_{n_{k-1}}$ i $u_{n_{k-2}}$; tak, iż $n_k > n_{k-1}$, a jednocześnie:

$$u_{n_{k-1}} < u_{n_k} < u_{n_{k-2}} \text{ albo } u_{n_{k-2}} < u_{n_k} < u_{n_{k-1}},$$

zależnie od tego, czy k jest liczbą parzystą czy nieparzystą. Taka liczba u_{n_k} istnieje, gdyż między liczbami $u_{n_{k-1}}$ i $u_{n_{k-2}}$ jest nieskończenie wiele liczb i każda z nich ma wskaźnik większy od n_{k-1}; liczby, których wskaźniki są mniejsze od n_{k-1}, znajdują się wszystkie poza przedziałem $(u_{n_{k-2}}, u_{n_{k-1}})$. Liczby $u_2, u_{n_4}, u_{n_6}, u_{n_8}, \ldots, u_{n_{2k}}, \ldots$ tworzą ciąg nieskończony malejący, liczby zaś $u_1, u_{n_3}, u_{n_5}, u_{n_7}, \ldots, u_{n_{2k-1}}, \ldots$ ciąg rosnący. Ciągi te zmierzają do granicy, gdyż są monotoniczne i ograniczone od góry i od dołu; niech y oznacza granicę pierwszego ciągu, z granicę drugiego; ponieważ każda liczba pierwszego ciągu jest większa od każdej liczby drugiego ciągu, to $z \leqslant y$. Liczba z należy do przedziału (0,1), a więc powinna należeć i do ciągu (10); niech np. $z = u_p$. Ponieważ wskaźniki n_k rosną nieograniczenie, więc, o ile k jest dostatecznie wielkie, to $n_k > p$; z dwóch wyrazów ciągu o wskaźnikach n_k i n_{k+1} jeden należy do ciągu rosnącego, drugi do ciągu malejącego, tak, iż liczba z czyli u_p jest zawarta między liczbami u_{n_k} i $u_{n_{k+1}}$; lecz jest to niemożliwe, gdyż wszystkie liczby, których wskaźniki są mniejsze od n_k (a właśnie $p < n_k$), są zawarte zewnątrz przedziału $(u_{n_k}, u_{n_{k+1}})$. Doszliśmy więc do sprzeczności. Zbiór liczb przedziału (0, 1) nie jest przeliczalny.

Ponieważ zbiór liczb przedziału (0, 1) nie jest przeliczalny, więc mamy możność przyjęcia tego zbioru jako pierwowzoru zbiorów mocy różnej od mocy ciągu naturalnego liczb. Każdy zbiór tej samej mocy, co zbiór liczb

przedziału $(0, 1)$, będziemy nazywali zbiorem mocy continuum. A więc zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dowolnego przedziału (a, b) jest mocy continuum; tak samo zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich i ujemnych. Zbiór mocy continuum otrzymamy także, usuwając ze zbioru E mocy continuum przeliczalną mnogość elementów; pozostałość stanowi zbiór E', który oczywiście nie może być przeliczalnym, gdyż dwa zbiory przeliczalne, dodane do siebie, nie mogą dać zbioru nieprzeliczalnego E. Jednakowoż nie można stąd jeszcze wnioskować, że mnogość E' jest mocy continuum; wniosek taki byłby słuszny, gdybyśmy umieli udowodnić, że każdy zbiór liczb jest bądź przeliczalny, bądź mocy continuum; ponieważ udowodnić tego nie umiemy, więc należy dowód nasz oprzeć bezpośrednio na możności ustalenia odpowiedniości doskonałej między elementami zbioru E' i zbioru mocy continuum. Zauważmy przedewszystkiem, iż z każdego zbioru nieskończonego możemy wydzielić nieskończoną liczbę elementów, stanowiących zbiór przeliczalny, (nawet tak, by pozostały zbiór był także nieskończony). Jeżeli bowiem jakiś zbiór E jest nieskończony, to na zasadzie określenia, zawiera więcej niż n elementów, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią; usunąwszy ze zbioru E elementy u_1, u_2, $u_3, \ldots, u_n$, nie wyczerpiemy zbioru E, czyli pozostanie w E przynajmniej jeden element, który nazwiemy u_{n+1}, usunąwszy u_{n+1}, pozostanie w E znowu przynajmniej jeden element u_{n+2} i t. d. Tak więc przeliczalny zbiór elementów, stanowiących ciąg nieskończony $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ jest składową częścią zbioru E. Gdybyśmy usunęli z E przeliczalną mnogość elementów $u_1, u_3, u_5, \ldots u_{2k+1}, \ldots$ to z pewnością pozostanie w E nieskończony zbiór elementów. Symbolicznie możemy to przedstawić w sposób następujący:

$$E = D + E',$$

gdzie E jest zbiór dany, D zbiór przeliczalny, a E' oznacza zbiór pozostały po usunięciu ze zbioru E elementów, należących do zbioru D; czyli inaczej znak $+$ oznacza, że zbiór E powstaje przez połączenie zbiorów D i E' bez elementów wspólnych. Ale do E' możemy zastosować rozkład podobny, czyli

$$E' = D' + E'',$$

gdzie D' oznacza znowu zbiór przeliczalny; tak więc

$$E = D + (D' + E'') = (D + D') + E'' = D'' + E'',$$

gdzie D'', jako suma dwóch mnogości przeliczalnych, jest zbiorem przeliczalnym. Między E i E' możemy ustanowić następującą odpowiedniość doskonałą. Ponieważ

$$E = D'' + E'', \text{ a } E' = D' + E'',$$

więc każdy element zbioru E, należący do E'', będzie odpowiadał samemu sobie, gdyż jest jednocześnie elementem drugiego zbioru, czyli E'; każdy element zbioru E, nie należący do E'', należy do D'' i jako taki będzie odpowiadał pewnemu elementowi zbioru D', równej z nim mocy, przyczem ta odpowiedniość będzie też doskonałą.

Jeżeli z mnogości mocy continuum usuniemy skończoną* albo przeliczalną mnogość elementów, otrzymamy nowy zbiór także mocy continuum.

Łącząc ze sobą razem elementy skończonej liczby zbiorów mocy continuum, otrzymamy nowy zbiór także mocy continuum. Możemy bowiem podporządkować elementy pierwszego zbioru liczbom przedziału $(0, 1)$, elementy drugiego zbioru liczbom przedziału $(1, 2)$ elementy trzeciego zbioru liczbom przedziału $(2, 3)$ i t. d., wreszcie elementy

---

* Zbiór wszystkich liczb przedziału $(0, 1)$ i zbiór wszystkich liczb tegoż przedziału bez liczby 0, np., są tej samej mocy. Niech E oznacza pierwszy, E' drugi zbiór. $E' = D + E''$, $E = D' + E''$, gdzie D jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, a D' oznacza zbiór D więcej jeden element 0. E i E' są więc tej samej mocy.

ostatniego, dajmy na to n^{tego} zbioru, liczbom przedziału $(n-1, n)$, w takim razie mnogość, utworzona z połączenia elementów tych wszystkich mnogości,* jest podporządkowana liczbom przedziału $(0, n)$, a więc mnogość ta jest mocy continuum. Niech n rośnie do nieskończoności; z jednej strony otrzymamy wtedy zbiór E, powstały z połączenia elementów nieskończonej przeliczalnej mnogości zbiorów mocy continuum $E = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_n + ...$, z drugiej zaś strony otrzymamy podporządkowany zbiorowi E zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich; ten zbiór jest mocy continuum, a więc także i zbiór E.

Łącząc w jeden zbiór elementy nieskończonej przeliczalnej mnogości zbiorów mocy continuum, otrzymamy nowy zbiór także mocy continuum.

Zbiór mocy continuum otrzymamy, dodając nieprzeliczalną mnogość zbiorów, mocy continuum każda; pod mnogością nieprzeliczalną rozumiemy tutaj mnogość mocy continuum. Jest to słynne twierdzenie Cantora. Można temu twierdzeniu dać następujące brzmienie: zbiór wszystkich par liczb x, y, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0 \leqslant y \leqslant 1$, jest mocy continuum, czyli zbiór wszystkich takich par liczbowych można podporządkować w sposób doskonały liczbom przedziału $(0, 1)$. Parę liczbową x, y nazywamy punktem na płaszczyźnie, przyczem x i y nazywamy spółrzędnemi odpowiadającego punktu. Zbiór punktów, których spółrzędne x, y czynią zadość warunkom $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, stanowi kwadrat; a więc zbiór punktów kwadratu jest tej samej mocy, co zbiór punktów odcinka, np., jednego z boków tego kwadratu.**

---

* Patrz uwagę poprzednią.

** Dla dowodu odsyłamy do dzieł, poświęconych teorji mnogości; patrz, np. „Zarys teorji mnogości“ W. Sierpińskiego.

Punkty skupienia.

39. Pojęcie mocy oparte jest na pojęciu zbioru i odpowiedniości; nie zależy więc od natury elementów zbioru, czyli może być zastosowane do jakichkolwiek zbiorów; tak, np., zbiór punktów może być jednakowej mocy ze zbiorem funkcyj pewnej klasy i t. p. Jeśli mowa była poprzednio zawsze o zbiorach, utworzonych z liczb, to dla tego jedynie, że te mnogości właśnie są podstawą wszystkich naszych dalszych rozważań. Rozważania następnych rozdziałów, przeciwnie, są ściśle związane z naturą elementów zbioru. Naprzód mowa będzie o zbiorach, utworzonych z liczb rzeczywistych, lub, jak inaczej powiemy, z punktów na prostej; następnie zajmiemy się zbiorami, których elementy stanowią pary liczbowe, czyli punkty na płaszczyźnie, trójki liczbowe, czyli punkty przestrzeni i t. d.

37. *Zbiory utworzone z liczb rzeczywistych, czyli zbiory punktowe linjowe. Otoczenie punktu. Punkt skupienia.*

Otoczeniem punktu (liczby) a nazywamy zbiór (punktów) liczb rzeczywistych x, spełniających warunek

$$a < x \leqslant a + \varepsilon \text{ lub } a - \varepsilon \leqslant x < a,$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą całkowitą dodatnią; innemi słowy otoczeniem punktu a nazywa się przedział $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, przyczem sam punkt a do otoczenia nie należy, czyli punkt a z tego przedziału usuwamy. Nieraz wygodnie jest odróżnić zbiór punktów x, spełniających warunek $a - \varepsilon \leqslant x < a$, od zbioru punktów x, określonych przez $a < x \leqslant a + \varepsilon$; pierwszy z tych dwóch przedziałów nazywamy otoczeniem lewostronnem, drugi — otoczeniem prawostronnem.

Punkt a nazywamy punktem skupienia zbioru (Z), jeżeli istnieją punkty x_z tego zbioru, spełniające warunek $a - \varepsilon < x_z < a$ lub $a < x_z < a + \varepsilon$, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε. W takim razie w otoczeniu punktu a

mamy nieskończenie wiele punktów zbioru (Z); w rzeczy samej, gdyby w przedziale $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ znajdowała się tylko skończona liczba punktów zbioru (Z), to można byłoby, oczywiście, wyznaczyć taką liczbę dodatnią ε', by nie było ani jednego punktu x_z, spełniającego warunek $a-\varepsilon' \leqslant x_z < a$ lub $a < x_z \leqslant a+\varepsilon'$. Można więc poprzednie określenie zastąpić następującem: punktem skupienia zbioru (Z) nazywamy każdy punkt, w dowolnie małem otoczeniu którego znajduje się nieskończenie wiele punktów zbioru (Z); to określenie punktu skupienia możemy rozszerzyć, biorąc w ostatniem określeniu „otoczenie“ w znaczeniu „szerszem“, t. j. zaliczając sam punkt do owego otoczenia. Takie rozszerzenie jest niezbędne, jeżeli nieskończenie wiele elementów zbioru (Z) są liczbami równemi, co może mieć miejsce, gdy elementem zbioru są wyrazy ciągu (patrz niżej „uwaga“). Jeżeli więc nieskończenie wiele elementów zbioru (Z) równa się liczbie a, to na zasadzie tej dodatkowej umowy liczba a będzie punktem skupienia.

Punkt skupienia może do zbioru (Z) należeć, ale także może do zbioru (Z) nie należeć. Punkt skupienia jest naturalnem uogólnieniem pojęcia granicy, dlatego też punkty skupienia nazywamy czasem punktami granicznemi. W dowolnie małem otoczeniu *granicy* muszą znajdować się „prawie“ wszystkie punkty zbioru (Z), t. j. wszystkie punkty z wyjątkiem skończonej liczby; w dowolnie zaś małem otoczeniu punktu *skupienia* musi się znajdować nieskończenie wiele punktów zbioru (Z), ale niekoniecznie „prawie“ wszystkie. Tak, np. jeżeli zbiór (Z) jest ciągiem, to punkt a będzie punktem skupienia, jeżeli w dowolnie małem otoczeniu punktu a znajduje się nieskończenie wiele punktów ciągu o wskaźnikach np. parzystych, gdy tymczasem punkty ciągu (Z) o wskaźnikach nieparzystych mogą do otoczenia punktu a wcale nie należeć; jasna rzecz, że taki punkt a, choć jest punktem skupienia, nie jest granicą. Tak, np. zbiór punktów (liczb)

ciągu: $a_n = \frac{1}{n}\left\{(n-1)\sin^2\frac{\pi}{2}n + \sin^2\frac{\pi}{2}(n-1)\right\}$, czyli ciągu $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ posiada punkt skupienia 0, gdyż w dowolnie małem otoczeniu tego punktu znajduje się nieskończenie wiele punktów zbioru, mianowicie „prawie" wszystkie punkty o wskaźnikach parzystych; zero jednak granicą tego ciągu nie jest. Punkt 1 jest także punktem skupienia powyższego ciągu, gdyż w dowolnie małem otoczeniu punktu 1 znajdują się „prawie" wszystkie punkty o wskaźnikach nieparzystych. Punkt skupienia 0 do zbioru należy, natomiast punkt skupienia 1 do zbioru nie należy. Z tego zestawienia pojęć granicy i punktu skupienia wynika, że granica zawsze jest punktem skupienia, punkt skupienia natomiast może nie być granicą. Punkt skupienia rozszerza więc pojęcie granicy. Jak widzieliśmy na przytoczonym tylko co przykładzie, zbiór może posiadać więcej niż jeden punkt skupienia, gdy tymczasem granica, jak wiemy, może być tylko jedna.

Przykłady: 1) Zbiór wyrazów ciągu podwójnego: $a_{n,m} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)$, (gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$) posiada nieskończenie wiele punktów skupienia, mianowicie punktami skupienia są wszystkie punkty $\frac{1}{2^n}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$ i punkt 0. Punkty skupienia danego zbioru tworzą nowy zbiór nieskończony; taki zbiór nazywa się zbiorem pochodnym. Punktem skupienia tego zbioru pochodnego jest tu punkt 0.

2) Zbiór wyrazów ciągu podwójnego $a_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+m}$, (gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$); zbiór ten jest przeliczalny; możemy np. wypisać jego wyrazy według następującego łatwego do uchwycenia prawa: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$,

$\frac{1}{1}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{7}, \frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}. \frac{1}{1}+\frac{1}{9}, \frac{1}{2}+\frac{1}{8}, \frac{1}{3}+\frac{1}{7}, \frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \ldots$ Punktami skupienia są punkty: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots$; tworzą one mnogość pochodną; ta mnogość pochodna ma jeden tylko punkt skupienia, mianowicie punkt 0.

3) Zbiór wszystkich liczb wymiernych przedziału $(0, 1)$. Zbiór ten jest przeliczalny. Punktami skupienia są wszystkie liczby rzeczywiste (wymierne i niewymierne) przedziału $(0, 1)$; w rzeczy samej, w dowolnie małem otoczeniu każdego punktu przedziału $(0, 1)$ znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych. Mnogość pochodna utworzona jest ze wszystkich punktów przedziału $(0, 1)$, jest więc mocy continuum.

4) Zbiór utworzony ze wszystkich wyrazów ciągu $a_n = (-1)^n$; zbiór ten posiada dwa punkty skupienia $+1$ i -1.

Uwaga. Przykład ten pokazuje, że należy odróżniać zbiór, utworzony z wyrazów ciągu, od zbioru wartości liczbowych tego ciągu. Tak, np., zbiór, którego elementami są wyrazy ciągu $a_n = (-1)^n$, jest zbiorem nieskończonym, gdyż zawiera nieskończenie wiele różnych elementów; tak, np., element a_2 jest różny od elementu a_4, chociaż wartość liczbowa jest jednakowa, równa jedności. Tymczasem zbiór, którego elementami są wartości liczbowe danego ciągu, jest zbiorem skończonym, gdyż zawiera dwa tylko elementy $+1$ i -1. Pochodzi to stąd, że wyrazy ciągu różnią się miejscem, które zajmują, tak, iż dwa wyrazy, mające różne wskaźniki, stanowią dwa elementy różne, chociażby ich wartości liczbowe były jednakowe.

38. Każdy punkt a zbioru (Z), który nie jest zarazem punktem skupienia, nazywamy punktem odosobnionym. Jeżeli punkt a nie jest punktem skupienia zbioru (Z), to istnieje takie otoczenie* punktu a, które nie zawiera żadnego

---

* „Otoczenie“ w znaczeniu węższem.

punktu zbioru (Z); jeżeli np. zbiór (Z) składa się z liczb, to można znaleźć taką liczbę dodatnią ε, iż żadna z liczb x, spełniających warunek $a < x < a + \varepsilon$ lub $a - \varepsilon < x < a$, nie należy do (Z). Odwrotnie, jeżeli można znaleźć taki przedział $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, wewnątrz którego jest tylko skończona liczba punktów (elementów), należących do zbioru (Z), to punkt a, oczywiście, jest punktem odosobnionym.

Zbiór, złożony z samych tylko punktów odosobnionych, jest przeliczalny; takim np. jest zbiór $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Ponieważ różne elementy zbioru (Z) mogą być równemi liczbami, weźmy pod uwagę zbiór (A), utworzony ze wszystkich różnych liczb zbioru (Z). Każdej liczbie a zbioru (A) możemy podporządkować pewien przedział δ_a, wewnątrz którego znajduje się jedna tylko liczba a zbioru (A). W ten sposób ustalimy odpowiedniość doskonałą między liczbami a zbioru (A) i przedziałami δ_a pewnego zbioru przedziałów na prostej. Możemy przyjąć, iż dwa jakiekolwiek nasze przedziały δ_a i δ_b nie mają żadnego punktu wspólnego. Wystarczy więc udowodnić, że zbiór naszych przedziałów jest przeliczalny. Te z pośród naszych przedziałów δ_a, które stanowią odcinek większy od h lub równy h, (co oznaczać będziemy przez $\delta_a \geqslant h$, gdzie h jest zupełnie dowolne > 0), tworzą zbiór E przeliczalny; gdyż w przedziale $(-n, +n)$ takich przedziałów δ_a mamy najwyżej $\frac{2n}{h}$, a więc dla ponumerowania ich wystarczy skończona liczba wskaźników; ponieważ każdy przedział δ_a będzie się mieścił w odcinku $(-n, +n)$, o ile n dostatecznie wielkie, więc, każdy przedział $\delta_a \geqslant h$ będzie podporządkowany pewnemu numerowi k, co dowodzi przeliczalności odpowiedniego zbioru E. Ponieważ każdy przedział δ_a będzie spełniał warunek $\delta_a \geqslant h$, o ile h jest dostatecznie małe, więc wystarczy wziąć pod uwagę, dajmy na to, ciąg malejący wartości $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$,

$h = \frac{1}{3}, \ldots, h = \frac{1}{n}$, i t. d. Te z pośród odcinków δ_a, które spełniają warunek $\delta_a \geqslant 1$, stanowią zbiór przeliczalny E_1; te, które spełniają warunek $1 > \delta_a \geqslant \frac{1}{2}$, stanowią zbiór przeliczalny $E_2, \ldots$; te, które spełniają warunek $\frac{1}{n-1} > \delta_a \geqslant \frac{1}{n}$, stanowią zbiór przeliczalny E_n, i t. d.

Zbiór wszystkich odcinków δ_a stanowi zbiór $E_1 + E_2 + E_3 \ldots + E_n + \ldots$, t. j. sumę zbiorów poszczególnych E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ i t. d.; a więc, jako suma przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych, jest zbiorem przeliczalnym. Tak więc zbiór (A) jest przeliczalny, skąd wynika, że i zbiór (Z) jest także przeliczalny, albowiem każdej liczbie a zbioru (A) odpowiada najwyżej skończona liczba elementów zbioru (Z).

39. Punkty skupienia zbioru (Z) tworzą nowy zbiór, który nazywamy zbiorem pochodnym i oznaczać będziemy przez (Z'). Zbiór pochodny (Z') może zawierać nieskończenie wiele elementów i posiadać także swoje punkty skupienia, które tworzą zbiór pochodny zbioru pochodnego, czyli zbiór pochodny drugiego rzędu (Z''), i t. d.

Jeżeli zbiory (Z) i (Z') nie mają żadnego punktu (elementu) wspólnego, to zbiór Z nazywa się zbiorem odosobnionym, gdyż, jak łatwo sprawdzić, składa się tylko z punktów odosobnionych.

Jeżeli każdy punkt zbioru (Z') jest jednocześnie punktem zbioru (Z), t. j. należy do (Z), to zbiór (Z) nazywa się zamknięty albo domknięty. Wszystkie punkty skupienia zbioru domkniętego należą do tegoż zbioru.

Jeżeli każdy punkt zbioru (Z) należy do zbioru pochodnego (Z'), to zbiór (Z) nazywa się gęsty w sobie;* każdy punkt takiego zbioru jest zarazem punktem skupie-

*) Od pojęcia zbioru gęstego w sobie należy odróżniać pojęcie zbioru gęstego w przedziale (m, n). Zbiór punktów, należących do

nia; zbiór gęsty w sobie nie zawiera wcale punktów odosobnionych.

Jeżeli każdy punkt zbioru (Z) należy do (Z') i odwrotnie, każdy punkt zbioru (Z') należy do (Z), t. j. jeżeli zbiór jest domknięty i gęsty w sobie, to nazywa się doskonałym. Zbiory (Z) i (Z') są wtedy identyczne.

Przykłady. Zbiór $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ nie jest domknięty, gdyż liczba 0 należy do (Z'), ale nie należy do (Z). Zbiór $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ natomiast jest domknięty. Zbiór ten nie jest gęsty w sobie.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych przedziału $(0, 1)$ jest gęsty w sobie, natomiast nie jest zamknięty, gdyż (Z') zawiera wszystkie liczby (wymierne i niewymierne) przedziału $(0, 1)$.

Zbiór wszystkich liczb x przedziału $(0, 1)$, t. j. wszystkich liczb, spełniających warunek $0 \leqslant x \leqslant 1$, jest doskonały; natomiast zbiór wszystkich liczb x, spełniających warunek $a < x < b$, nie jest zbiorem doskonałym, gdyż nie jest domknięty, albowiem punkty a i b należą do (Z'), a nie do (Z); taki zbiór punktów będziemy nazywali przedziałem niewłaściwym; przedziałem niewłaściwym będziemy nazywać także przedziały $a \leqslant x < b$ i $a < x \leqslant b$, które

---

przedziału (m, n) nazywa się gęstym w tym przedziale, jeżeli w każdym dowolnie małym przedziale, stanowiącym część przedziału (m, n), istnieją zawsze punkty, należące do zbioru. Jasna rzecz, że zbiór Z gęsty w przedziale (m, n) musi być gęsty w sobie, gdyż z określenia zbioru gęstego w (m, n) wynika, że wszystkie punkty przedziału (m, n) należą do zbioru pochodnego Z'. Odwrotnie, zbiór gęsty w sobie może, oczywiście, nie być gęstym w przedziale (m, n); wystarczy dla przykładu wziąć pod uwagę zbiór, otrzymany ze zbioru wszystkich punktów przedziału (m, n) przez wyjęcie z tego zbioru punktów. należących do dowolnego przedziału (α, β), stanowiącego część przedziału (m, n).

nie są domknięte; dla odróżnienia zaś przedział $a \leqslant x \leqslant b$ będziemy nazywali przedziałem właściwym.

40. *Zbiór pochodny jest zbiorem domkniętym.* Niech (Z) oznacza dowolny zbiór, (Z') zbiór pochodny, t. j. zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru (Z); przez a oznaczać będziemy elementy zbioru (Z), przez a' elementy zbioru (Z'); niech m będzie punktem skupienia zbioru (Z'). Jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, w przedziale $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ mieści się nieskończenie wiele punktów zbioru (Z'); niech a' oznacza jeden z takich punktów; ponieważ a' jako element zbioru (Z') jest punktem skupienia zbioru (Z), więc w przedziale $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele punktów a. Przedział $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ jest całkowicie zawarty wewnątrz przedziału $(m-2\varepsilon, m+2\varepsilon)$, a więc w przedziale $(m-2\varepsilon, m+2\varepsilon)$ mieści się także nieskończenie wiele punktów a. Stąd wniosek, że punkt m jest punktem skupienia zbioru (Z), czyli należy do (Z'); tak więc każdy punkt skupienia m zbioru (Z') należy do (Z'). Zbiór (Z') jest domknięty, co trzeba było udowodnić.

Wniosek. Jeżeli zbiór (Z) jest gęsty w sobie, to zbiór pochodny (Z') jest doskonały.

Zauważmy przedewszystkiem co następuje: jeżeli zbiór (Z) jest częścią zbioru (E), to zbiór pochodny (Z') jest częścią zbioru pochodnego (E').

Jeżeli zbiór (Z) jest gęsty w sobie, to wszystkie elementy zbioru (Z) należą do zbioru pochodnego $(Z'=E)$; a więc zbiór Z' posiada punkty skupienia, które tworzą nowy zbiór (Z''); (Z) jest częścią (Z'), a więc (Z') jest częścią zbioru (Z''), czyli że zbiór (Z') jest gęsty; ponieważ jest domknięty, więc jest doskonały, czyli $Z'=Z''$.

Przykład. Zbiór (Z) wszystkich liczb wymiernych przedziału $(0, 1)$ jest niedomknięty, ale gęsty; zbiór po-

chodny (Z') zawiera wszystkie liczby przedziału $(0, 1)$; jest domknięty i gęsty, czyli doskonały.

41. *Zbiór ograniczony. Krańce. Kres górny i dolny.* Zbiór liczb (punktów) jest ograniczony od góry, jeżeli wszystkie jego elementy są liczbami mniejszemi od pewnej liczby M (leżą na lewo od punktu M). Zbiór jest ograniczony od dołu, jeśli wszystkie elementy są liczbami, większemi od pewnej liczby m. Jeżeli zbiór jest ograniczony od góry i od dołu, to muszą istnieć takie dwie liczby m i M, iż każdy element x zbioru (Z) spełnia warunki $m < x < M$. Liczby m i M będziemy nazywali krańcami zbioru ograniczonego (Z); jeżeli $M_1 > M$, $m_1 < m$, to liczby M_1 i m_1 będą, oczywiście, także krańcami dla zbioru (Z). Jeżeli liczby m i M są krańcami, to każdy punkt x zbioru (Z) należy do przedziału (m, M), a więc i do przedziału (m_1, M_1).

Stajemy wobec pytania, czy istnieje dla zbioru (Z), ograniczonego (od góry i od dołu), najmniejszy przedział, wewnątrz którego zawarte są wszystkie liczby zbioru. Jeżeli zbiór (Z) zawiera conajmniej dwie liczby różne, to, jasna rzecz, przedział (m, M), zawierający zbiór, nie może być dowolnie mały. Odpowiedź na powyższe pytanie w sensie twierdzącym daje pojęcie kresu górnego K i kresu dolnego k. Kresem górnym nazywamy najmniejszą liczbę, od której żadna liczba zbioru (Z) nie jest większa; kresem dolnym nazywamy największą liczbę, od której żadna liczba zbioru (Z) nie jest mniejsza.

Kres górny posiada więc dwie następujące własności, które tę liczbę K najzupełniej wyznaczają:

1) Każda liczba x zbioru (Z) jest mniejsza albo conajwyżej równa K, czyli $x \leqslant K$ dla wszystkich elementów zbioru.

2) Istnieją elementy zbioru (Z) większe od liczby $K - \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Pozostaje udowodnić, że taka liczba K istnieje. Mamy więc twierdzenie: *każdy zbiór, ograniczony od góry, posiada kres górny.*

Dowód przy pomocy przekroju. Do klasy wyższej zaliczymy każdą liczbę rzeczywistą, większą od wszystkich liczb x zbioru (Z); do klasy niższej zaliczymy wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste. Ten podział na klasy jest przekrojem, gdyż czyni zadość odpowiednim warunkom; żadna klasa nie jest pusta, gdyż, naprzykład, dowolna liczba x zbioru (Z) i każda liczba od niej mniejsza należy do klasy pierwszej; kraniec górny M, który na mocy założenia (zbiór ograniczony od góry) istnieje, należy do klasy drugiej. Każda liczba rzeczywista należy bądź do klasy pierwszej, bądź do klasy drugiej. Wreszcie każda liczba klasy niższej jest mniejsza od każdej liczby klasy wyższej; w rzeczy samej, jeżeli liczba l_1 należy do klasy pierwszej, to istnieje taki element x' zbioru (Z), iż $l_1 \leqslant x'$; jeżeli l_2 należy do klasy wyższej, to $x' < l_2$, a więc $l_1 < l_2$. Przekrój ten wyznacza pewną liczbę K, która jest albo największą liczbę klasy pierwszej, albo najmniejszą klasy drugiej. Ta liczba K jest właśnie kresem górnym. W rzeczy samej, żadna liczba x zbioru (Z) nie może być większa od K, bo gdyby $x > K$, to $x > K + \varepsilon > K$, o ile liczba ε jest mniejsza od $x - K$; lecz liczba $K + \varepsilon$, jako większa od K należy do klasy wyższej, a więc nierówność $x > K + \varepsilon = l_2$ jest niemożliwa, jako sprzeczna z określeniem liczb drugiej klasy. Musi więc być $x \leqslant K$; z drugiej strony liczba $K - \varepsilon$, jako mniejsza od K, należy do klasy pierwszej, z czego wynika, iż istnieją liczby x' zbioru (Z), spełniające nierówność $x' > K - \varepsilon = l_1$. A więc liczba K, wyznaczona przez nasz przekrój, jest kresem górnym.

W podobny sposób można udowodnić twierdzenie: jeżeli zbiór (Z) jest ograniczony od dołu, to posiada kres dolny k.

Liczba k jest wyznaczona przez dwie następujące własności:

1) Każda liczba x zbioru (Z) jest większa lub conajmniej równa k.

2) Istnieją liczby x' zbioru (Z) mniejsze od liczby $k+\varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Dowód zapomocą przekroju. Szczegóły zostawiamy czytelnikowi.

Zapomocą sprowadzenia do sprzeczności łatwo jest sprawdzić, że dla danego zbioru, ograniczonego od góry, może być tylko jedna liczba K. Tak samo dla zbioru, ograniczonego od dołu, kres dolny k jest wyznaczony jednoznacznie; gdyby bowiem były dwie liczby k i k_1, (przyczem $k \neq k_1$), spełniające tylko co wyszczególnione warunki, to doszlibyśmy do sprzeczności; szczegóły pozostawiamy również czytelnikowi.

Przykłady. 1) Zbiór (Z) wszystkich liczb całkowitych dodatnich jest ograniczony od dołu, kresem dolnym jest liczba jeden, należąca do (Z). Zbiór ten nie jest ograniczony od góry.

2) Zbiór (Z) wszystkich liczb rzeczywistych (punktów) przedziału właściwego $(0, 1)$, t. j zbiór wszystkich liczb, spełniających warunek $0 \leqslant x \leqslant 1$; kresem dolnym jest 0, kresem górnym 1; obie te liczby należą również do (Z).

3) Zbiór wszystkich liczb x przedziału niewłaściwego $0 < x < 1$; kresem dolnym jest 0, kresem górnym 1, lecz kresy k i K nie należą w tym przypadku do (Z).

4) Zbiór wszystkich liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$; kresami są również 0 i 1 i nie należą do (Z)

5) Zbiór wszystkich liczb wymiernych przedziału właściwego $(0, 1)$; kresami są tu również 0 i 1, lecz należą do (Z).

6) Zbiór liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; kresami są tu liczby 0 i 1, przyczem $K=1$ należy do (Z), a $k=0$ nie należy do (Z).

Z tych przykładów wynika, że kres zbioru (Z) może do zbioru (Z) należeć, ale może do zbioru nie należeć.

Jeżeli kres k lub K nie należy do zbioru (Z), to musi należeć do zbioru pochodnego (Z), czyli być punktem skupienia zbioru. Gdyby bowiem punkt K nie był punktem zbioru (Z) ani punktem skupienia tego zbioru, to w dostatecznie małem otoczeniu punktu K nie byłoby ani jednego punktu zbioru (Z), tak że w przedziale $(K-\varepsilon, K+\varepsilon)$ nie byłoby ani jednego elementu x zbioru (Z), co jest sprzeczne z określeniem kresu K.

Jeżeli k i K są kresami zbioru (Z), to każdy element x zbioru spełnia warunek $k \leqslant x \leqslant K$, t. j. należy do przedziału właściwego (k, K). Każda liczba M większa od K będzie krańcem górnym zbioru, każda liczba m, mniejsza od k będzie krańcem dolnym zbioru.

Jeżeli $k=K$, to zbiór (Z) zawiera tylko jedną liczbę; jeżeli elementami zbioru (Z) są wyrazy pewnego ciągu, to wyrazów tych może być nieskończenie wiele, ale w tym przypadku wszystkie mają tę samą wartość liczbową.

Jeżeli zbiór (Z) jest domknięty, i jeżeli posiada kres K (ewentualnie k), to kres K (ewentualnie k) należy do (Z); w rzeczy samej, stwierdziliśmy przed chwilą, że K, o ile nie należy do (Z), musi należeć do (Z'); otóż dla zbioru domkniętego każdy element zbioru (Z') należy do (Z), co dowodzi naszego twierdzenia.

42. *Największa z granic (punktów skupienia), najmniejsza z granic (punktów skupienia).*

Przypuśćmy, iż dany jest jakiś zbiór liczb rzeczywistych (punktów) (Z). Zbiór pochodny (Z'), o ile nie jest pusty, może także posiadać swój kres górny i kres dolny; będzie to miało z pewnością miejsce, gdy np. zbiór (Z) jest ograniczony od góry albo od dołu, jak się o tem możemy przekonać, rozumując przez sprowadzenie do sprzeczności.

Przypuśćmy, że (Z) jest ograniczony od góry i od dołu i że (Z') nie jest zbiorem pustym; więc (Z') jest także ograniczony, a więc posiada kres górny i kres dolny. Niech $\overline{G}$ oznacza kres górny zbioru pochodnego (Z'), a $\underline{g}$ jego kres dolny. Ponieważ zbiór (Z') jest domknięty, więc $\overline{G}$ i $\underline{g}$ należą do (Z'), czyli $\overline{G}$ i $\underline{g}$ są punktami skupienia zbioru (Z). Żadna liczba l, większa od $\overline{G}$, nie może być punktem skupienia zbioru (Z); gdyby bowiem $l > \overline{G}$, to liczba l, należąca do zbioru pochodnego (Z'), byłaby większa od kresu górnego $\overline{G}$ tego zbioru (Z'). Tak samo udowodnimy, że żadna liczba mniejsza od $\underline{g}$ nie może być punktem skupienia zbioru (Z). Tak więc $\overline{G}$ jest największą z granic uogólnionych, t. j. punktów skupienia, a $\underline{g}$ jest najmniejszą z granic (punktów skupienia). Wszystkie punkty skupienia zbioru (Z) należą więc do przedziału właściwego $(\underline{g}, \overline{G})$

Liczba $\overline{G}$ posiada następujące własności, które ją w zupełności wyznaczają:

1) „Prawie“ wszystkie elementy zbioru (Z) (ograniczonego od góry) są mniejsze od $\overline{G}+\varepsilon$, t. j. tylko skończona liczba elementów zbioru (Z) przewyższa liczbę $\overline{G}+\varepsilon$.*

2) Dowolnie małe otoczenie punktu $\overline{G}$ zawiera nieskończenie wiele elementów zbioru (Z), t. j. nieskończenie wiele liczb zbioru (Z) jest większych od $\overline{G}-\varepsilon$, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε.

Jeżeli istnieje liczba G, spełniająca powyższe dwa warunki, to, popierwsze, zbiór (Z) jest ograniczony od góry;

* Gdyby bowiem było nieskończenie wiele elementów zbioru (Z), większych od $\overline{G}+\varepsilon$, to w przedziale $(\overline{G}+\varepsilon, K)$ musiałoby się znajdować nieskończenie wiele elementów zbioru, a więc, na mocy twierdzenia l. 43, musiałby istnieć punkt skupienia, który, naturalnie, byłby większy od $\overline{G}$, wbrew założeniu.

powtóre G jest punktem skupienia zbioru (Z); potrzecie $G = \overline{G}$, t. j. G jest największą z granic.

Liczba $\underline{g}$ posiada następujące dwie własności, które ją w zupełności wyznaczają:

1) „Prawie“ wszystkie elementy zbioru (Z) (ograniczonego od dołu) są większe od $\underline{g} - \varepsilon$, t. j. tylko skończona liczba elementów zbioru (Z) jest mniejsza od $\underline{g} - \varepsilon$.

2) Dowolnie małe otoczenie punktu $\underline{g}$ zawiera nieskończenie wiele elementów zbioru (Z), a więc jest nieskończenie wiele elementów zbioru (Z) mniejszych od $\underline{g} + \varepsilon$, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε.

Jeżeli istnieje liczba g, spełniająca powyższe dwa warunki, to popierwsze zbiór (Z) jest ograniczony od dołu; powtóre g jest punktem skupienia zbioru (Z); potrzecie $g = \underline{g}$, t. j. g jest najmniejszą z granic.

Liczby $\underline{g}$ i $\overline{G}$ są wyznaczone przez powyższe warunki jednoznacznie; dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

Jeżeli zbiór (Z) nie jest ograniczony od góry, to niema, oczywiście, takiej liczby $\overline{G}$, gdyż z dwóch warunków, określających liczbę $\overline{G}$, pierwszy nie może być spełniony.

Jeżeli zbiór (Z) nie jest ograniczony od dołu, to niema, oczywiście, takiej liczby $\underline{g}$, gdyż z dwóch warunków, określających liczbę $\underline{g}$, pierwszy nie może być spełniony.

Jeżeli $\underline{g} = \overline{G}$, to zbiór (Z') zawiera jeden tylko punkt, zbiór (Z) zaś jest ograniczony i posiada jeden tylko punkt skupienia. Odwrotnie, jeśli (Z) jest ograniczony (od góry i od dołu) i posiada jeden tylko punkt skupienia, to $\underline{g} = \overline{G}$.

Porównajmy ze sobą określenia górnego kresu K i największej z granic $\overline{G}$.

Jeżeli kres górny K jest punktem odosobnionym zbioru (Z), to oczywiście $K > \overline{G}$; jeżeli kres górny K jest punktem

skupienia zbioru (Z), to jest, oczywiście, największą z granic; dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. A więc w tym przypadku $\overline{G}=K$. Ponieważ K może być tylko albo punktem odosobnionym albo punktem skupienia zbioru (Z), więc przytoczone dwa przypadki wyczerpują wszystkie możliwości; nigdy nie może być $K<\overline{G}$. Tak samo można porównać kres dolny k z najmniejszą z granic $\underline{g}$. Jeżeli k jest punktem odosobnionym, to $k<\underline{g}$; w przeciwnym razie $k=\underline{g}$. Liczby (punkty) $\underline{g}$ i $\overline{G}$ mogą do zbioru (Z) należeć lub nie należeć.

43. *Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.*

Każdy zbiór nieskończony, ograniczony od góry i od dołu, posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

Przypuśćmy, że wszystkie punkty zbioru (Z) należą do przedziału (m, M), gdzie m i M są krańcami zbioru ograniczonego (Z), przytem m możemy tak wybrać, by punkt ten nie należał do (Z). Każdy punkt (liczbę) X przedziału (m, M) zaliczymy do klasy pierwszej lub drugiej, zależnie od tego, czy w przedziale (m, X) mamy skończoną lub nieskończoną liczbę elementów zbioru (Z). Punkt m należy do klasy pierwszej; punkt M do klasy drugiej, bo w przedziale (m, M) są wszystkie punkty zbioru (Z), a jest ich nieskończenie wiele. Każdą liczbę mniejszą od m zaliczymy do klasy pierwszej, każdą liczbę większą od M do klasy drugiej; a więc każda liczba rzeczywista należy do jednej z dwóch klas. Każda liczba X_I pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby X_{II} drugiej klasy; jeżeli $X_I<m$ lub $X_{II}>M$, to rzecz jest oczywista; jeżeli X_I i X_{II} należą do przedziału (m, M), to, zakładając $X_I \geqslant X_{II}$, doszlibyśmy do sprzeczności. A więc musi być zawsze $X_I<X_{II}$. Nasz podział liczb rzeczywistych na dwie klasy jest więc przekrojem. Przekrój ten wyznacza liczbę, którą oznaczymy przez g. Liczba $g-\varepsilon$ należy do klasy niższej, liczba $g+\varepsilon$

do klasy wyższej. W przedziale $(m, g-\varepsilon)$ mamy zatem skończoną liczbę elementów zbioru (Z), w przedziale zaś $(m, g+\varepsilon)$, przeciwnie, liczbę nieskończoną tych elementów; stąd wniosek, iż przedział $(g-\varepsilon,\ g+\varepsilon)$ zawiera nieskończenie wiele elementów zbioru (Z); a więc punkt g jest punktem skupienia zbioru (Z). Twierdzenie zostało udowodnione.

Punkt skupienia, którego istnienie zostało stwierdzone przez tylko co przytoczone rozumowanie, jest właśnie najmniejszą z granic, t. j. $g=\underline{g}$; w rzeczy samej, w przedziale $(m, g-\varepsilon)$ znajduje się skończona liczba elementów zbioru (Z), czyli niema tam ani jednego punktu skupienia naszego zbioru; ponieważ $\varepsilon>0$ jest liczbą dowolnie małą, więc nie może być $g<\underline{g}$. Udowodniliśmy że:

Każdy zbiór nieskończony, ograniczony od góry i od dołu, posiada najmniejszą granicę $\underline{g}$ *

Twierdzenie Weierstrassa można wygłosić jeszcze w sposób następujący: jeżeli zbiór (Z) jest nieskończony i ograniczony od góry i od dołu, to zbiór pochodny (Z') nie jest pusty.

Jeżeli zbiór pochodny nie jest pusty, to muszą istnieć granice największa i najmniejsza $\underline{g}$ i $\overline{G}$.

Uwaga. By wysłowienie twierdzeń uprościć i ujednostajnić, wygodnie jest wprowadzić następującą umowę: jeżeli zbiór (Z) nie jest ograniczony od góry, to fakt ten wyrazimy, mówiąc, iż zbiór posiada miejsce skupienia (granicę uogólnioną) w punkcie niewłaściwym $+\infty$; zdanie „zbiór (Z) posiada miejsce skupienia w punkcie niewłaściwym $-\infty$“ będziemy uważali za równoznaczne ze zdaniem: „zbiór (Z) nie jest ograniczony od dołu“. Otoczeniem punktu niewłaściwego $+\infty$ jest zbiór wszystkich

* Czytelnik w sposób podobny udowodni istnienia największej z granic $\overline{G}$.

liczb x, większych od dowolnie wielkiej liczby M; otoczeniem punktu niewłaściwego $-\infty$ jest zbiór wszystkich liczb x, mniejszych od dowolnie małej liczby m; tak, np., zbiór liczb $x > 1$ stanowi otoczenie punktu niewłaściwego $+\infty$, zbiór liczb $x < 100$ stanowi otoczenie punktu niewłaściwsgo $-\infty$. Zdania: „zbiór (Z) nie jest ograniczony od góry" i „w dowolnem otoczeniu punktu niewłaściwego $+\infty$ znajduje się nieskończenie wiele elementów zbioru (Z)" posiadają tę samą treść. W ten sposób twierdzeniom, odnoszącym się do zbiorów ograniczonych, i twierdzeniom, odnoszącym się do zbiorów nieograniczonych, będziemy mogli nadać brzmienie jednakowe. Tak np., twierdzenie Weierstrassa będzie brzmiało: każdy zbiór, zawierający nieskończenie wiele elementów (liczb, albo punktów na prostej), posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

Jeżeli zbiór jest ograniczony od góry i od dołu, to wszystkie punkty skupienia są punktami właściwemi; jeżeli zbiór nie jest ograniczony od góry, to punkt niewłaściwy $+\infty$ jest punktem skupienia, ale, oczywiście, nie koniecznie jedynym. Tak samo, jeżeli zbiór nie jest ograniczony od dołu, to musi posiadać przynajmniej jeden punkt skupienia, mianowicie punkt niewłaściwy $-\infty$. Tak naprzykład, zbiór liczb ciągu naturalnego posiada jeden punkt skupienia, punkt niewłaściwy $+\infty$; zbiór: $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots n, \frac{1}{n}, \ldots$ ma dwa punkty skupienia, jeden w punkcie właściwym 0, drugi w punkcie niewłaściwym $+\infty$; zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich i ujemnych posiada dwa punkty skupienia, oba niewłaściwe $-\infty$ i $+\infty$.

Twierdzeniom o największej i najmniejszej z granic można nadać brzmienie następujące: jeżeli zbiór posiada nieskończenie wiele elementów, to posiada granicę największą $\overline{G}$ i granicę najmniejszą $\underline{g}$.

Jeżeli zbiór jest ograniczony od góry i od dołu, to g

i $\overline{G}$ są punktami właściwemi; jeżeli zbiór nie jest ograniczony od góry, to $\overline{G}$ jest punktem niewłaściwym $+\infty$; jeżeli zbiór nie jest ograniczony od dołu, to $\underline{g}$ jest punktem niewłaściwym $-\infty$.

Jeżeli $\underline{g}=\overline{G}$, to zbiór posiada jeden tylko punkt skupienia; tak np., jeżeli zbiorem (Z) jest zbiór liczb ciągu naturalnego, to najmniejsza i największa granica są sobie równe, gdyż $\underline{g}$ jak i $\overline{G}$ zlewają się z punktem niewłaściwym $+\infty$.

Konsekwentnie musimy także rozszerzyć pojęcie zbieżności ciągu; mianowicie, jeżeli ciąg $a_1, a_2,..., a_n,...$ jest ciągiem dążącym do nieskończoności, to powiemy, że posiada granicę niewłaściwą, że zmierza do granicy niewłaściwej $+\infty$; tak samo, jeżeli $a_n \to -\infty$, to powiemy, iż ciąg nasz zmierza do granicy niewłaściwej $-\infty$. Jeżeli ciąg zmierza do granicy niewłaściwej, to „prawie" wszystkie wyrazy ciągu należą do otoczenia tego punktu niewłaściwego.

43. *Kryterjum Cauchy zbieżności ciągu.*

Przypuśćmy, że dany jest pewien ciąg; niech (E) oznacza zbiór, którego elementami są wszystkie wyrazy tego ciągu; (Z) zaś niech oznacza zbiór wartości liczbowych danego ciągu, tak iż dwa różne elementy zbioru (Z) są dwoma różnemi liczbami, co niekoniecznie musi mieć miejsce dla zbioru (E). Zbiór (Z) może zawierać skończoną liczbę punktów tylko wtedy, gdy w ciągu danym nieskończenie wiele wyrazów są liczbami równemi. Ciąg będziemy, jak zwykle, nazywali zbieżnym, jeżeli posiada granicę właściwą.

Twierdzenie. Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony (od góry i od dołu) i posiada jeden tylko punkt skupienia.

Uwaga. Punktami skupienia ciągu będziemy nazywali punkty skupienia odpowiedniego zbioru liczb, jak również

punkty, którym odpowiada nieskończenie wiele równych wyrazów ciągu.

Założenie. Ciąg a_1, a_2, $a_3, \ldots$, $a_n, \ldots$ jest zbieżny; $a_n \to g$.

„Prawie“ wszystkie wyrazy ciągu spełniają warunek $|a_n - g| \leqslant \varepsilon$, czyli zewnątrz przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ znajduje się skończona liczba wyrazów ciągu; niech a_{n1}, $a_{n2}, \ldots$ $\ldots$, a_{n_k} będą temi wyrazami, spełniającemi jedną z dwóch nierówności $x < g - \varepsilon$ lub $x > g + \varepsilon$; wszystkie inne spełniają nierówność $g - \varepsilon \leqslant x \leqslant g + \varepsilon$. Niech M oznacza największą z liczb $|a_{n1}|$, $|a_{n2}|, \ldots$, $|a_{n_k}|$, $|g - \varepsilon|$, $|g + \varepsilon|$. Wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność $|a_n| < M$, czyli wszystkie wyrazy ciągu są zawarte w przedziale $(-M, +M)$, czyli ciąg jest ograniczony.

Punkt g jest, oczywiście, punktem skupienia ciągu; łatwo stwierdzić, że jest on jedynym punktem skupienia ciągu. Gdyby bowiem był drugi punkt skupienia ciągu g_1, to „prawie“ wszystkie wyrazy ciągu musiałyby spełniać warunek $|a_n - g_1| < \varepsilon$, czyli „prawie“ wszystkie wyrazy ciągu byłyby zawarte w przedziale $(g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon)$; otóż, jeżeli $0 < \varepsilon < \frac{|g_1 - g|}{2}$, to przedziały $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ i $(g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon)$ nie mają ani jednego punktu wspólnego, a więc nie mogą być „prawie“ wszystkie wyrazy tego samego zbioru i w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ i w przedziale $(g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon)$; gdyż jeżeli „prawie“ wszystkie wyrazy są wewnątrz $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$, to zewnątrz tego przedziału, a więc i w przedziale $(g_1 - \varepsilon, g_1 + \varepsilon)$ musi się ich znajdować skończona liczba a nie „prawie“ wszystkie, skąd sprzeczność.

Twierdzenie odwrotne. Jeżeli ciąg jest ograniczony i jeżeli posiada jeden tylko punkt skupienia, to ciąg jest zbieżny, t. j. posiada granicę właściwą.

Jeżeli g jest punktem skupienia ciągu, to znaczy, iż nieskończenie wiele wyrazów ciągu znajduje się w prze-

dziale $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, jakkolwiek jest małą liczba dodatnia ε. Jeżeli ciąg jest ograniczony i nie posiada innego punktu skupienia po za punktem g, to po za przedziałem $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ mamy tylko skończoną liczbę wyrazów ciągu. Niech m i M będą krańcami naszego ciągu; (liczby m i M istnieją, bo ciąg jest ograniczony). Gdyby nieskończenie wiele wyrazów ciągu spełniało nierówność $m < a_n < g - \varepsilon$, to w przedziale $(m, g-\varepsilon)$ musiałby się znajdować przynajmniej jeden punkt skupienia $g_1 \neq g$ tego ciągu. W rzeczy samej, wynika to z twierdzenia Weierstrassa, jeżeli wartości liczbowe owych wyrazów a_n stanowią zbiór nieskończony; w przeciwnym razie musi być nieskończenie wiele wyrazów równych tej samej liczbie l; ale w takim razie ta liczba l jest punktem skupienia, nie zbioru (Z) wartości liczbowych wprawdzie, ale ciągu. Tak, w obu przypadkach musiałby istnieć punkt skupienia po za punktem g, co jest sprzeczne z założeniem. Tak samo udowodnimy, że tylko skończona liczba wyrazów ciągu spełnia warunek $g+\varepsilon < a_n < M$. „Prawie" wszystkie wyrazy ciągu znajdują się więc w przedziale $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, t. j. „prawie" wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność

$$g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon;$$

ponieważ liczba dodatnia ε może być dowolnie mała, ciąg a_n jest zbieżny i zmierza do granicy właściwej g.

Tak więc, warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ciągu jest ograniczoność ciągu i istnienie jednego tylko punktu skupienia.

Uwaga. Czytelnik sprawdzi, że przez wprowadzenie granic niewłaściwych możemy twierdzeniom, dotyczącym ciągów ograniczonych i nieograniczonych, nadać jednakowe wysłowienie, mianowicie:

Jeżeli ciąg posiada tylko jeden punkt skupienia (właściwy czy niewłaściwy), to punkt ten jest granicą, do której

ciąg zmierza. Granica ta jest granicą właściwą albo niewłaściwą, zależnie od tego, czy ciąg jest ograniczony czy nie.

Odwrotnie. Jeżeli ciąg zmierza do granicy (właściwej lub niewłaściwej), to ta granica jest jedynym punktem skupienia ciągu.

Klasa ciągów o jednym punkcie skupienia i klasa ciągów, posiadających granicę, — to jedno i to samo.

Na podstawie tylko co przytoczonych rozważań możemy podać prosty dowód podstawowego w teorji granic twierdzenia Cauchy'ego, stanowiącego tak zwane ogólne kryterjum zbieżności.

Żeby ciąg był zbieżny (t. j. posiadał granicę właściwą), trzeba i wystarcza, by każdej liczbie dodatniej (dowolnie małej) ε można było podporządkować taką liczbę całkowitą n_0, że wartość bezwzględna różnicy dwóch jakichkolwiek wyrazów ciągu o wskaźnikach większych od n_0 była zawsze mniejsza od ε.

Warunek wysłowiony w tym twierdzeniu jest konieczny, t. j. jeżeli ciąg:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

jest zbieżny, to $|a_n - a_m| < \varepsilon$, dla $n > n_0$ i $m > n_0$; dowód podaliśmy w ustępie I. 23.

Pozostaje więc do udowodnienia tylko, że omawiany warunek jest warunkiem dostatecznym, t. j. jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taki wskaźnik $n_0(\varepsilon)$,* iż $n > n_0$ i $m > n_0$ pociągają nierówność

$$|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

to ciąg jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy przedewszystkiem, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, jest ograniczony od góry i od dołu; w samej rzeczy, niech M oznacza największą, a m najmniejszą z pośród liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n_0}, a_{n_0+1} + \varepsilon, a_{n_0+1} - \varepsilon$. Z założenia wy-

*) Piszemy $n_0(\varepsilon)$ zamiast n_0, by uwidocznić fakt zasadniczy, polegający na tem, iż liczba n_0 zależy od liczby ε.

nika, iż $a_n < a_{n_0+1} + \varepsilon$ i $a_n > a_{n_0+1} - \varepsilon$ dla każdego $n > n_0$, t. j. że wszystkie wyrazy ciągu o wskaźniku większym od n_0 znajdują się w przedziale $(a_{n_0+1} - \varepsilon, a_{n_0+1} + \varepsilon)$; tak więc $m \leqslant a_n \leqslant M$ dla każdej wartości wskaźnika n, t. j. wszystkie wyrazy ciągu są liczbami, należącymi do przedziału (m, M); ciąg więc jest ograniczony od góry i od dołu.

Jako dalszy wniosek z założenia, możemy udowodnić, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ posiada tylko jeden punkt skupienia; w rzeczy samej punkty skupienia naszego ciągu mogą znajdować się tylko w przedziale $(a_{n_0+1} - \varepsilon, a_{n_0+1} + \varepsilon)$, gdyż zewnątrz tego przedziału znajduje się tylko liczba skończona wyrazów, mianowicie nie więcej niż n_0. Przypuśćmy, iż dwa różne punkty g_1 i g_2 są oba punktami skupienia ciągu; w takim razie g_1 i g_2 muszą mieścić się w przedziale $(a_{n_0+1} - \varepsilon, a_{n_0+1} + \varepsilon)$; ponieważ wyniki naszego rozumowania są prawdziwe przy każdej (dowolnie małej) wartości ε, doszliśmy więc do sprzeczności, bo, o ile $\varepsilon < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$, z nierówności $a_{n_0+1} - \varepsilon \leqslant g_1 < g_2 \leqslant a_{n_0+1} - \varepsilon$ wynika $|g_1 - g_2| \leqslant 2\varepsilon$, czyli $|g_1 - g_2| < |g_1 - g_2|$, co jest niemożliwe. Tak więc dwóch punktów skupienia być nie może; natomiast musi być przynajmniej jeden punkt skupienia, na mocy twierdzenia Weierstrassa (I. 43).

Udowodniliśmy więc, że nasz ciąg jest ograniczony od góry i od dołu i posiada jeden tylko punkt skupienia. Stąd wnioskujemy, że ciąg jest zbieżny i że wzmiankowany punkt skupienia jest jego granicą.

45. Jeżeli liczba α jest punktem skupienia (Z), to można utworzyć ciąg częściowy z wybranych elementów zbioru (Z) w ten sposób, by utworzony ciąg był zbieżny i granicą jego była liczba α. W rzeczy samej, niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ oznacza dowolny ciąg malejący o elementach dodatnich i o granicy zero; można np. wziąć $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Niech x_1 oznacza element zbioru (Z), zawarty w przedziale $(\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1)$, niech x_2 oznacza element zbioru

(Z), różny od x_1 i zawarty w przedziale $(\alpha - \varepsilon_2, \alpha + \varepsilon_2)$, i t. d.; niech. x_p oznacza element zbioru (Z), różny od x_1, $x_2, \ldots, x_{p-1}$ i zawarty w przedziale $(\alpha - \varepsilon_p, \alpha + \varepsilon_p)$. Z określenia punktu skupienia wynika, że taki element x_p istnieje dla każdego p. Utworzy się w ten sposób ciąg nieskończony $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$; wyrazy tego ciągu zostały wybrane z pośród elementów zbioru (Z). Otóż $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = \alpha$. W rzeczy samej, niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią; ponieważ $\varepsilon_n \to 0$, istnieje więc wskaźnik n_0 taki, że $\varepsilon_n < \varepsilon$, skoro tylko $n > n_0$. Stąd wynika, że nierówność $n > n_0$, pociąga nierówność $|\alpha - x_n| < \varepsilon_n < \varepsilon$, czyli, rzeczywiście, $\lim\limits_{n \to \infty} x = \alpha$.

Czytelnik udowodni w sposób podobny, że jeżeli zbiór (Z) nie jest ograniczony, np. od góry, to można wybrać z pośród jego elementów ciąg częściowy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ taki, że $x_n \to \infty$.

Szeregi.

46. *Istota i określenia zasadnicze teorji szeregów.*

Do teorji szeregów dochodzimy w sposób zupełnie naturalny przez uogólnienie pojęcia sumy w przypadku, gdy liczba składników jest nieskończona. Wyobraźmy, iż dany jest nieskończony ciąg liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$; teorja szeregów ma na celu podanie określenia sumy nieskończonej liczby składników:

(1) $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Gdyby liczba składników była skończona, otrzymalibyśmy sumę wszystkich składników dodając dwa pierwsze, następnie do sumy dwóch pierwszych — trzeci, do sumy trzech pierwszych składników — czwarty i t. d., aż do wyczerpania. Gdy liczba składników jest nieskończona, określenie powyższe niema sensu, gdyż wszystkich składników wyczerpać nie możemy; przeciwnie, proces dodawania

kolejnych składników jest nieskończony; otrzymamy tak zwane sumy częściowe:

$$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2;\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \ldots;$$
$$\ldots s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n; \ldots$$

Sumy częściowe szeregu (1) tworzą ciąg nieskończony

(2) $$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots,\ s_n, \ldots$$

Określenie zasadnicze.

Jeżeli ciąg (2) sum częściowych dąży do granicy, to tę granicę nazywamy sumą szeregu (1).

Jeżeli zatem

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \text{ to}$$

s jest sumą szeregu (1), co wyrażamy, pisząc

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s$$

Jeżeli szereg (1) posiada sumę, czyli gdy ciąg (2), utworzony z jego sum częściowych, dąży do granicy, to szereg (1) nazywamy szeregiem zbieżnym. W przeciwnym razie mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Znając wyrazy szeregu (1), można, oczywiście, znaleźć sumy częściowe, a więc utworzyć ciąg (2); odwrotnie, gdy znamy ciąg, jaki tworzą sumy częściowe, możemy znaleźć wszystkie wyrazy odpowiadającego szeregu. W samej rzeczy, ponieważ

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1} + a_n,$$
$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1},$$

więc $s_n - s_{n-1} = a_n$, tak iż $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2 - s_1$,

$$a_3 = s_3 - s_2, \ldots, a_n = s_n - s_{n-1}, \ldots$$

Przypuśćmy, np., iż wiadome jest, że

$$s_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

W takim razie

$$a_1 = s_1 = \tfrac{3}{2};\ a_2 = s_2 - s_1 = \tfrac{7}{4} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{4}; \ldots$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} - \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Sumą szeregu

$$\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

jest $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 2.$

Przykład 2-gi.

Przypuśćmy, że $s_n = \dfrac{n}{n+1}$; w takim razie

$$a_1 = s_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = s_2 - s_1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6};\ a_3 = s_3 - s_2 = \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{12}, \ldots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Szukany szereg jest więc następujący:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

więc szereg jest zbieżny; jego sumą jest liczba 1.

Przykład 3-ci.

Rozważmy teraz szereg, będący postępem geometrycznym:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots$$

Jego sumami częściowemi są:

$$s_1 = a;\ s_2 = a + aq;\ s_3 = a + aq + aq^2; \ldots$$

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}(1 - q^n); \ldots (q \neq 1).$$

Należy rozpatrzeć oddzielnie kilka przypadków, zależnie od wartości wykładnika q.

1) $q > 1$.

W tym przypadku, jak wiemy (l. 29),

$$q^n \to \infty,$$

a więc wartość bezwzględna $s_n = \frac{a}{q-1}(q^n - 1)$ także rośnie nieograniczenie, jak i q^n, t. j. $|s_n| \to \infty$. Wobec tego szereg nasz jest w tym wypadku rozbieżny.

2) $-1 < q < 1$.

W takim razie $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, więc

$$\lim s_n = \frac{a}{1-q} \lim (1 - q^n) = \frac{a}{1-q}.$$

Szereg zatem jest zbieżny; jego suma

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

3) $q = \pm 1$.

Ten przypadek rozpada się na dwa podrzędne:

a) $q = 1$;

wówczas $s_n = n.a$ i $|s_n| \to \infty$; szereg jest rozbieżny.

b) $q = -1$;

wówczas $s_{2n} = 0$, $s_{2n+1} = a$; zatem i tutaj granica nie istnieje; szereg jest rozbieżny.

4) $q < -1$.

Ponieważ w tym przypadku q^n granicy nie posiada, więc szereg jest rozbieżny.

A zatem szereg, który jest postępem geometrycznym, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykładnik q jest zawarty w przedziale pomiędzy -1 a $+1$, z wykluczeniem krańców przedziału (przedział niewłaściwy).

Jeżeli szereg

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots$$

jest zbieżny, to wyraz ogólny a_n musi dążyć do zera, gdy wskaźnik jego n rośnie nieograniczenie. Istotnie

$$a_n = s_n - s_{n-1};$$

gdy n rośnie nieograniczenie, to $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$,

a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$, więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Jest to warunek konieczny, lecz nie dostateczny zbieżności szeregów: istnieją bowiem szeregi rozbieżne, których wyraz ogólny a_n dąży do zera. Zbadajmy dla przykładu tak zwany szereg harmoniczny:

(3) $$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{n} + \ldots,$$

tu $a_n = \frac{1}{n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; udowodnimy, że szereg (3) jest rozbieżny. W tym celu utwórzmy i zbadajmy sumy częściowe.

$s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$,

a więc $s_4 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; podobnie

$s_8 = s_4 + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})$, czyli

$$s_8 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.$$

Następnie $s_{16} = s_8 + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16})$, $s_{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Udowodniliśmy więc, że $s_{(2^2)} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$; $s_{(2^3)} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$; $s_{(2^4)} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$.

Zapomocą indukcji udowodnimy z łatwością, że $s_{(2^k)} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$.

Ponieważ wyrazu szeregu (3) są wszystkie dodatnie, to sumy częściowe tworzą ciąg rosnący; jeżeli więc $n \geqslant 2^k$, to $s_n \geqslant s_{(2^k)} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$, czyli

$$s_n > 1 + E(lg_2 n) \cdot \tfrac{1}{2},$$

gdzie $E(lg_2 n)$ oznacza, jak zwykle, największą liczbę całkowitą nie większą od $lg_2 n$.

Gdy $n \to \infty$, to $lg_2 n$, a więc i $E(lg_2 n)$ rosną do nieskończoności, wskutek czego $s_n \to \infty$; szereg harmoniczny jest rozbieżny.

47. *Warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregu.*

Niech będzie dany szereg

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Utwórzmy ciąg sum częściowych

(2) $$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

Warunek konieczny i dostateczny zbieżności ciągu (patrz I. 44) jest następujący: trzeba i wystarcza, by do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można było dobrać taki wskaźnik n_0, że gdy $n > n_0$, to

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

dla każdego $p > 0$.

Ponieważ

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p},$$

więc warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregu przyjmuje postać następującą: trzeba i wystarcza, by każdej liczbie dodatniej ε można było podporządkować taką liczbę n_0, by dla $n > n_0$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

dla każdego $p > 0$.

Jeżeli to kryterjum jest spełnione, to wynika zeń, iż np. przy stałym p

(4) $$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}) = 0$$

czyli $$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} (a_n + a_{n+1}) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 0, \text{ i t. d.}$$

Mamy więc tu nieskończenie wiele warunków ($p=1,2,\ldots$), które wszystkie są spełnione, o ile szereg jest zbieżny; każdy z tych warunków, poszczególnie wzięty, nie jest warunkiem wystarczającym; aby się o tem przekonać, wystarczy powrócić do szeregu harmonicznego. Dla szeregu harmonicz-

nego warunek (4) jest spełniony; w rzeczy samej, przy stałym p

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)=0,$$

co czytelnik z łatwością udowodni. Można nawet udowodnić, że $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)$ jest zero, nawet wtedy, gdy p rośnie wraz z n, o ile tylko stosunek $\frac{p}{n}$ dąży do zera.

Tak więc z tego, że przy pewnych stałych wartościach p (i nawet zmiennych) wyrażenie

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p} \tag{5}$$

dąży do zera gdy $n\to\infty$, nie można jeszcze wnioskować, że szereg (1) jest zbieżny. W tym celu należałoby wprzód stwierdzić, że to zmierzanie ku zeru ma miejsce zawsze, niezależnie od tego, według jakiego prawa zmienia się p w zależności od n.

Gdyby jednak wyrażenie (5) przy stałym p nie dążyło do zera, gdy $n\to\infty$, to na tej zasadzie mielibyśmy prawo wnioskować, iż szereg (1) jest rozbieżny.

Z tych wyjaśnień wynika, iż pomimo swej teoretycznej prostoty, ogólne kryterjum zbieżności, które podaliśmy przed chwilą, może być w zastosowaniach bardzo uciążliwe, przyczem trudności mogą być nieraz nie do przezwyciężenia. Wskutek czego stosujemy w praktyce cechy prostsze, ale mniej ogólne, gdyż wyrażające tylko warunki dostateczne, ale już nie konieczne zbieżności szeregów. O tych kryterjach będzie mowa później.

Uwaga. Różnicy $s_{n+p}-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}$ oznaczać będziemy symbolem $R_{n,p}$; gdy szereg jest zbieżny, różnicę $s-s_n$ oznaczać będziemy przez R_n; nazywamy ją resztą; łatwo udowodnić, że $R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}+\ldots$,

t. j. że równa się sumie szeregu, który otrzymamy, odrzucając w szeregu (1) n pierwszych wyrazów. Wynika to z równości

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p},$$

przez przejście do granicy dla $p \to \infty$. W rzeczy samej $\lim\limits_{p \to \infty} (s_{n+p} - s_n) = s - s_n = R_n$; z drugiej zaś strony $\lim\limits_{p \to \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) =$ sumie szeregu $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ $\ldots + a_{n+p} + \ldots$

48. Należy teraz zbadać, czy szeregi zbieżne, jako sumy nieskończonej liczby składników, posiadają te same zasadnicze własności, co i suma skończonej liczby wyrazów.

Należy więc przedewszystkiem zbadać, czy suma szeregu zbieżnego zależy czy nie zależy od porządku składników (prawo przemienności); następnie, czy suma się zmieni czy się nie zmieni, gdy składniki będziemy łączyć w grupy i otrzymane grupy sumować (prawo łączności); należy także zbadać, czy czynność odwrotna do poprzedniej wpływa na wartość sumy, t. j. czy możemy rozłożyć pojedyncze wyrazy szeregu na sumy dwóch lub trzech np. składników bez wpływu na wartość sumy szeregu.

Na razie nie możemy dać wyczerpującej odpowiedzi na pierwsze pytanie; okażemy niebawem, że prawo przemienności nie stosuje się do szeregów, t. j. że suma szeregu zbieżnego może się zmienić ze zmianą porządku składników; że nawet szereg zbieżny stać się może ze zmianą porządku składników rozbieżnym. Jednocześnie wydzielimy z pośród szeregów zbieżnych pewną klasę szeregów, mianowicie tak zwane szeregi bezwzględnie (albo bezwarunkowo) zbieżne, dla których prawo przemienności jest spełnione.

Co do drugiego pytania, możemy nań odpowiedzieć odrazu, mianowicie prawo łączności jest dla szeregów speł-

nione. W rzeczy samej, przypuśćmy, iż dany jest szereg zbieżny

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = s$$

i niech $u_1 = a_1 + a_2$, $u_2 = a_3 + a_4, \ldots, u_p = a_{2p-1} + a_{2p}, \ldots$

Tworzymy szereg

(6) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots \text{ czyli}$$

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2p-1} + a_{2p}) + \ldots \quad .$$

Szereg (6) jest zbieżny i sumą jego jest także s; w rzeczy samej, niech $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ oznaczają, jak zwykle, sumy częściowe szeregu (1), a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ sumy częściowe szeregu (6). Z założenia wynika że

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \text{ i że } \sigma_1 = s_2, \sigma_2 = s_4, \ldots, \sigma_p = s_{2p} \ldots$$

tak, iż ciąg $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p, \ldots$ jest utworzony z wyrazów ciągu zbieżnego $s_1, \ldots s_2, \ldots s_3, \ldots s_p, \ldots$ i stanowi część tego ciągu. Lecz z teorji granic wynika, że ciąg $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p \ldots$ musi być także zbieżny i posiada tę samą granicę s (patrz ustęp I. 26). Tak więc szereg (6) jest zbieżny i sumą jego jest liczba s. Dla ustalenia uwagi łączyliśmy wyrazy po dwa; czytelnik z łatwością zauważy, że podany dowód stosuje się i do każdego innego przypadku. Samo przez się się rozumie, że przy łączeniu w grupy nie zmieniamy porządku wyrazów, t. j. wykluczamy z pod naszych rozważań ugrupowania w rodzaju następującego:

$$(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + (a_5 + a_7) + \ldots + (a_{2p-2} + a_{2p}) +$$
$$+ (a_{2p-1} + a_{2p+1}) + \ldots$$

Tak samo łatwo jest odpowiedzieć na pytanie e; ale w tym przypadku odpowiedź jest przecząca. Aby to okazać, wystarczy dać odpowiedni przykład; w tym celu weźmy pod uwagę, np. szereg, którego każdy wyraz (składnik) jest zero; taki szereg jest, oczywiście, zbieżny, gdyż wszystkie sumy częściowe są tu równe zeru, a więc i ich

granica równa się 0. Zastąpmy każdy wyraz zero przez sumę liczb przeciwnych $+1$ i -1, t. j. zamiast szeregu $0+0+0+...+0+$. napiszmy $(1-1)+(1-1)+(1-1)+..$ $...+(1-1)+...$ O ile teraz usuniemy nawiasy, otrzymamy szereg

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...,$$

który jest rozbieżny. Czytelnik sam znajdzie dowolną liczbę podobnych przykładów.

Jeżeli do szeregu (1) dopiszemy jeszcze jeden składnik, np. a, to otrzymamy nowy szereg

$$(7) \qquad a+a_1+a_2+...+a_n+...,$$

który będzie zbieżny w razie zbieżności szeregu (1) i sumą jego będzie $s+a$. Istotnie, gdy oznaczymy sumę $n+1$ wyrazów szeregu (7) przez s'_{n+1}, to $s'_{n+1}=a+s_n$, a więc, przechodząc do granicy

$$\lim_{n\to\infty} s'_{n+1}=a+\lim_{n\to\infty} s_n=a+s$$

Podobnie zamiast jednego, moglibyśmy dodać do szeregu (1) kilka wyrazów (ale zawsze tylko liczbę skończoną), przyczem otrzymany szereg byłby też zbieżny.

Stąd wynika również, że od szeregu (1) można odjąć, t. j. usunąć pewną liczbę wyrazów; szereg nadal pozostanie zbieżny, a suma jego zmniejszy się o sumę odjętych wyrazów, np.:

$$a_3+a_4+a_5+...+a_n+...=s-a_1-a_2$$

A zatem można w szeregu zbieżnym zmienić skończoną liczbę wyrazów (t. j. usunąć pewne wyrazy, a na ich miejsce wprowadzić inne); otrzymany nowy szereg będzie też zbieżny.

Okoliczność ta jest bardzo ważna; wynika stąd wniosek, że zbieżność lub rozbieżność szeregu jest własnością graniczną, t. j. zależną nie od skończonej, lecz od nieskończonej liczby wyrazów szeregu. Własność tę można wyra-

zić jeszcze inaczej, mianowicie, w sposób następujący: zbieżność szeregu pociąga za sobą zbieżność wszystkich jego reszt R_n; odwrotnie, jeżeli którakolwiek reszta R_{n_0} jest zbieżna, to i szereg jest zbieżny. Jeżeli szereg jest rozbieżny, to i wszystkie reszty R_n są rozbieżne; odwrotnie, jeśli którakolwiek reszta R_{n_0} jest rozbieżna, to i szereg dany jest rozbieżny. Oczywiście, porządek wyrazów w R_n powinien być taki sam, jak w szeregu danym.

Stąd wniosek, że przy badaniu zbieżności szeregu, możemy ograniczyć się do badania zbieżności reszty R_n.

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu zbieżnego (1) pomnożymy przez tę samą liczbę k, to otrzymany nowy szereg

(8) $$ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_n + \ldots$$

będzie zbieżny i jego sumą będzie $k.s$. Oznaczmy sumę częściową n wyrazów szeregu (8) przez s'_n; oczywiście

$$s'_n = k.s_n; \text{ a więc}$$

$s' = \lim\limits_{n \to \infty} s'_n = k \lim\limits_{n \to \infty} s_n = k.s$, co trzeba było udowodnić.

49. *Szeregi o wyrazach dodatnich.*

Szeregi, których wyrazy są od pewnego miejsca wszystkie tego samego znaku, są pod wielu względami łatwiejsze do zbadania od innych, dlatego też najprzód zajmiemy się właśnie tą klasą szeregów. Dla uproszczenia będziemy w dalszym ciągu tego rozdziału zakładali, że wszystkie wyrazy, zacząwszy od pierwszego, są np. dodatnie; lecz wszystkie wyniki, otrzymane dla takich szeregów będą, na zasadzie rozważań rozdziału poprzedniego, stosować się i do szeregów, w których nie wszystkie, lecz „prawie" wszystkie wyrazy są tego samego znaku; przyczem termin „prawie" będzie oznaczał „wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby" albo inaczej, co na jedno wychodzi, „wszystkie, zacząwszy od pewnego wskaźnika".

Przypuśćmy więc, że w szeregu (1) wszystkie wyrazy są dodatnie, t. j. $a_n > 0$ dla każdego n Ponieważ $s_{n+1} = s_n + a_n$,

więc $s_{n+1} > s_n$, czyli ciąg utworzony z sum częściowych jest rosnący. A zatem, jeśli dla każdego n jest spełniony warunek, że $s_n < M$, t. j. jeżeli sumy częściowe są ograniczone od góry, to szereg jest zbieżny, bo ciąg rosnący, ograniczony od góry posiada granicę (patrz l. 30). Analogicznie dla szeregów, których wyrazy są ujemne, wtedy $s_{n+1} < s_n$ i ciąg jest malejący. A zatem, jeżeli w takim szeregu dla każdego n spełniona jest nierówność $s_n > m$, t. j. jeśli sumy częściowe są ograniczone od dołu, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie pomocnicze o porównywaniu dwóch szeregów o wyrazach dodatnich.

Jeżeli wyrazy szeregów

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + ...$$

(9) $$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

są wszystkie (albo „prawie“ wszystkie) dodatnie lub w każdym razie nie ujemne i jeśli przy wszystkich (albo „prawie“ wszystkich) wartościach wskaźnika n mamy $b_n \leqq a_n$ i jeżeli szereg (1) jest zbieżny, to i szereg (9) jest zbieżny.

W toku rozumowania przyjmujemy, że wysłowione warunki są spełnione zawsze. Na zasadzie uwagi końcowej rozdziału poprzedniego czytelnik sam da sobie radę z dowodem w przypadku, gdy te warunki są spełnione „prawie“ zawsze.

Sumę częściową n wyrazów szeregu (1) oznaczmy przez s_n, zaś szeregu (9) przez s'_n; wówczas, na zasadzie założenia, mamy

(10) $$s'_n \leqq s_n$$

Ponieważ szereg (1) jest zbieżny, a ciąg $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ jest rosnący, więc $s_n < s$, gdzie $s = \lim s_n$; a zatem na mocy (10) zachodzi także nierówność

(11) $$s'_n < s;$$

lecz ciąg $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n, \ldots$ jest rosnący; z (11) wynika, że jest ograniczony od góry, a więc szereg (9) jest zbieżny.

Analogiczne twierdzenie można udowodnić i dla szeregów rozbieżnych. Jeżeli wyrazy szeregów (1) i (9) są wszystkie dodatnie, jeżeli szereg (1) jest rozbieżny, i jeżeli dla każdej wartości n

$$b_n \geqslant a_n,$$

to i szereg (2) jest rozbieżny. Dowód, zupełnie łatwy, zostawiamy czytelnikowi.

Przykłady.

Udowodnić, że szereg

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

jest zbieżny. Porównujemy wyrazy szeregu

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\ldots+\frac{1}{n.n}+\ldots$$

odpowiednio z wyrazami szeregu

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}+\ldots$$

Warunki ostatniego twierdzenia o porównaniu dwóch szeregów są tu spełnione. Wystarczy przyjąć

$$a_n=\frac{1}{(n+1)n},\quad b_n=\frac{1}{(n+1)^2};$$

stwierdzamy, że: $a_n>0$, $b_n>0$, $b_n<a_n$; wreszcie, że szereg, którego wyrazem ogólnym jest a_n jest zbieżny (patrz l. 46), a więc i szereg, którego wyrazem ogólnym jest b_n, także jest zbieżny.

Udowodnić, że szereg

$$\frac{1}{lg2}+\frac{1}{lg3}+\ldots+\frac{1}{lgn}+\frac{1}{lg(n+1)}+\ldots$$

jest rozbieżny. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$\frac{1}{lg n} > \frac{1}{n}$ i porównać dany szereg z szeregiem harmonicznym, który jest rozbieżny.

Jeżeli dany szereg (9) o wyrazach dodatnich i jeżeli chcemy sprawę jego zbieżności rozstrzygnąć przy pomocy twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów, powinniśmy szukać szeregu zbieżnego (1), którego wyrazy są „prawie" zawsze większe od wyrazów szeregu danego. Taki szereg będziemy nazywali szeregiem przewyższającym szereg dany (majorante). Możemy więc twierdzenie o porównywaniu dwóch szeregów wypowiedzieć w sposób następujący: szereg dany jest zbieżny, jeśli istnieje szereg przewyższający zbieżny.

50. *Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryterjum zbieżności Cauchy. Kryterjum d'Alembert'a.*

Na mocy rozważań poprzedniego rozdziału możemy być pewni zbieżności każdego szeregu, dla którego szeregiem przewyższającym jest szereg geometryczny $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots$ o wykładniku r dodatnim mniejszym od jedności. Postępując w ten sposób otrzymamy kryterjum Cauchy.

Jeżeli dla wszystkich wartości $n > n_0$ jest spełniony warunek $\sqrt[n]{a_n} < r < 1$, to szereg (1) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny.* W rzeczy samej, z $\sqrt[n]{a_n} < r$ wynika, że $a_n < r^n$ ma miejsce dla wszystkich wskaźników $n > n_0$ czyli „prawie" zawsze. Tak więc szereg geometryczny zbieżny $1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ jest w danym przypadku szeregiem przewyższającym, co dowodzi zbieżności szeregu danego.

Kryterjum Cauchy można także wysłowić w następujący sposób. Utwórzmy ciąg

---

* r oznacza liczbę stałą, niezależną od n.

(12) $$a_1, \sqrt{a_2}, \sqrt[3]{a_3}, \sqrt[4]{a_4}, \ldots, \sqrt[n]{a_n},$$

Jeżeli istnieje liczba stała r mniejsza od jedności, taka, że „prawie" wszystkie wyrazy ciągu (12) są od niej mniejsze, to szereg (1) jest zbieżny.

Przypuśćmy, że ciąg (12) jest ograniczony od góry i niech $\overline{G}$ będzie największą z granic tego ciągu, czyli największą liczbą zbioru pochodnego, co oznaczamy pisząc

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \overline{G}.$$

Liczba $\overline{G}$ posiada następującą własność, (która ją wyznacza); nieskończenie wiele wyrazów ciągu (12) przewyższa każdą liczbę $\overline{G} - \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią, natomiast „prawie" wszystkie wyrazy ciągu (12) są mniejsze od każdej liczby kształtu $\overline{G} + \varepsilon$.

Jeżeli więc $\overline{G} \geqslant 1$, to w ciągu (12) jest nieskończenie wiele wyrazów, większych od każdej liczby r mniejszej od jedności. Jeżeli natomiast $\overline{G} < 1$, to każda liczba r, spełniająca warunek $\overline{G} < r < 1$, jest większa od „prawie" wszystkich wyrazów ciągu (12). Własności liczby $\overline{G}$ wyłożone były w rozdziale 42

Widzimy stąd, że dla danego szeregu (1) szereg geometryczny zbieżny jest szeregiem przewyższającym, wtedy i tylko wtedy, gdy największa z granic ciągu (12) jest mniejsza od jedności. W tym więc przypadku szereg (1) jest zbieżny na mocy kryterjum Cauchy.

Natomiast, jeżeli $\overline{G} > 1$, to nieskończenie wiele wyrazów ciągu (12) jest większych od jedności; lecz jeśli $\sqrt[k]{a_k} > 1$, to i $a_k > 1$; wnioskujemy stąd, że w tym wypadku nieskończenie wiele wyrazów ciągu (1) przewyższa liczbę jeden, a więc warunek $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ nie jest spełniony i szereg (1) jest rozbieżny.

O ile $\overline{G}=1$, to nie możemy utworzyć szeregu geometrycznego zbieżnego, przewyższającego szereg dany, ale nie możemy też twierdzić, że szereg jest rozbieżny, chyba, że w jakiś sposób udowodnimy, iż w ciągu (12) jest nieskończenie wiele wyrazów większych od jedności lub równych jedności. Jeżeli „prawie" wszystkie wyrazy w (12) są mniejsze od jedności i $\overline{G}=1$, to stąd nic o zbieżności lub rozbieżności szeregu (1) wnioskować nie możemy.

Jeżeli ciąg (12) posiada granicę g, to, jak wiemy, granica ta jest jednocześnie największą z granic $\overline{G}$; tak więc, jeśli granica g jest mniejsza od jedności, to szereg (1) jest zbieżny, jeśli $g>1$, to szereg (1) jest rozbieżny. Wypadek wątpliwy będzie miał miejsce gdy $g=1$.

Wyłożone tu kryterjum Cauchy jest bardzo dogodne w zastosowaniach, ale jak widzieliśmy nie jest ogólnem; jest to warunek dostateczny, ale nie konieczny; stosuje się tylko do szeregów, które dają się porównać z szeregiem geometrycznym.

Jeżeli porównywać będziemy stosunek dwóch kolejnych wyrazów szeregu danego (1) ze stosunkiem dwóch wyrazów kolejnych postępu geometrycznego, to otrzymamy kryterjum zbieżności d'Alembert'a. Kryterjum to jest następujące:

Jeżeli istnieje taka liczba dodatnia $r<1$, iż dla wszystkich wartości $n>n_0$, czyli „prawie" zawsze, spełniony jest warunek

$$\text{(13)} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}<r<1,$$

to szereg (1) jest zbieżny. W rzeczy samej, z warunku (13) wynikają nierówności:

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}<r;\ \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}<r;\ldots,\frac{a_n}{a_{n-1}}<r;\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<r;$$

pomnóżmy przez siebie stronami powyższe nierówności (jest ich $n - n_0$). Otrzymamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0+1}} < r^{n-n_0},$$

stąd

$$a_{n+1} < \frac{a_{n_0+1}}{r^{n_0}} \cdot r^n.$$

Oznaczmy stałą $\frac{a_{n_0+1}}{r^{n_0}}$ przez k; w takim razie $a_{n+1} < kr^n$. Iloczyn kr^n jest wyrazem ogólnym postępu geometrycznego zbieżnego: $k + kr + kr^2 + \ldots + kr^n + \ldots$; a zatem, na mocy twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów, musi być zbieżny i szereg (1).

Odpowiednia cecha rozbieżności jest następująca: jeśli istnieje taka liczba $r \geqslant 1$, iż „prawie" zawsze $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant r$, to szereg (1) jest rozbieżny. Dowód zostawiamy czytelnikowi.

Wnioski. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dąży do granicy mniejszej od jedności, to szereg jest zbieżny; jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dąży do granicy większej od jedności, to szereg jest rozbieżny.

Zakres zastosowalności kryterjum Cauchy jest szersze, niż d'Alembert'a, t. j. gdy kryterjum oparte na stosunku $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ daje pożądany wynik, to i kryterjum oparte na $\sqrt[n]{a_n}$ nie zawodzi; odwrotnie jest inaczej; zdarzyć się bowiem może, że kryterjum d'Alembert'a zawodzi, gdy kryterjum Cauchy daje się zastosować z powodzeniem.

Obok ciągu (12) możemy wziąć pod uwagę ciąg (14)*

(14) $$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots$$

Oznaczmy przez $\overline{g_c}$ i $\overline{G_c}$ najmniejszą i największą z gra-

* Zakładamy, że $a_n > 0$ dla każdego n.

nic ciągu (12), a przez $\overline{g}_a$ i $\overline{G}_a$ odpowiednio najmniejszą i największą z granic ciągu (14). Czytelnik udowodni, że między temi liczbami zachodzą* następujące związki:

$$\overline{g}_a \leqslant \overline{g}_c \leqslant \overline{G}_c \leqslant \overline{G}_a.$$

Stąd wynikają wnioski następujące: 1) Jeżeli $\overline{G}_a < 1$, to i $\overline{G}_c < 1$, a więc przy tem założeniu szereg jest zbieżny; jeżeli $\overline{g}_a > 1$, to i $\overline{G}_c > 1$, a więc przy tem założeniu szereg jest rozbieżny. Pozostaje wątpliwym przypadek, gdy $\overline{G}_a \geqslant 1$, gdy tymczasem $\overline{g}_a \leqslant 1$.

2) Jeżeli istnieje taka liczba dodatnia $r < 1$, iż „prawie" zawsze $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, t. j., jeżeli kryterjum zbieżności d'Alembert'a daje się zastosować, to $\overline{G}_a < 1$, a więc także i $\overline{G}_c < 1$, co dowodzi, że w tym przypadku kryterjum Cauchy także nie zawodzi.

Jeżeli $\overline{G}_a = \overline{g}_a$, to i $\overline{G}_c = \overline{g}_c$, czyli jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje, to musi istnieć także $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$, i granica ta równa się poprzedniej, t. j. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Przykłady.

I) Dany jest szereg:

$$(15) \qquad 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)\, x^n + \ldots$$

Zastosujemy kryterjum d'Alembert'a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\, x^n}{n\, x^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$$

O ile x jest liczbą dodatnią mniejszą od jedności, to można znaleźć taką liczbę r i taki wskaźnik n_0, że dla $n > n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1$, i szereg jest zbieżny. W rzeczy samej, niech r

** Patrz ćwiczenie N. 35.

oznacza dowolną liczbę dodatnią, spełniającą warunek $x<r<1$; w takim razie wystarczy wziąć $n_0>\frac{x}{r-x}$, albowiem wtedy

$$x\left(1+\frac{1}{n_0}\right)<r \text{ i } \frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)x<\left(1+\frac{1}{n_0}\right)x<r.$$

Zauważmy, iż w danym przypadku

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=x.$$

A więc można było odrazu wnioskować, iż dla $x<1$, szereg (15) jest zbieżny, dla $x>1$, rozbieżny. Gdy $x=1$ szereg jest także rozbieżny, gdyż wyrazy jego są wtedy większe od jedności. Gdybyśmy chcieli stosować kryterjum Cauchy, musielibyśmy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zastąpić przez $\sqrt[n]{a_n}$ czyli przez $x.\sqrt[n]{n+1}$ można udowodnić bezpośrednio, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{1+\tfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\tfrac{1}{n}}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ Lecz możemy się oprzeć na twierdzeniu, udowodnionym przed chwilą, że $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, o ile ta druga granica istnieje; ponieważ w danym wypadku $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, jak widzieliśmy, istnieje i równa się x, więc i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ czyli $x.\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=x$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1.$

II) Niech będzie dany szereg

$$(16)\quad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$$

Zastosujemy i tutaj kryterjum d'Alemberta.

$$(17)\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1};$$

niech x oznacza dowolną liczbę dodatnią i ustalmy liczbę całkowitą n_0 zapomocą warunku $n_0 \leqslant x < n_0 + 1$. W takim razie dla każdego wskaźnika $n > n_0$ stosunek po prawej stronie równości (17) będzie mniejszy od liczby mniejszej od jedności, co dowodzi zbieżności szeregu. Tak więc szereg (16) jest zbieżny dla każdej dodatniej wartości x; zobaczymy później, że pozostaje zbieżnym i przy ujemnych wartościach liczby x.

Kryterjum Cauchy sprowadza się w danym przypadku do badania wyrażenia $\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n}}$;

ponieważ $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, więc, na mocy twierdzenia, któreśmy stosowali przed chwilą, $x \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, czyli $\sqrt[n]{n!}$ rośnie do nieskończoności wraz z n.

Chociaż zakres zastosowalności kryterjum d'Alembert'a jest mniej szeroki, jednak w praktyce kryterjum to ma częstsze zastosowanie, niż kryterjum Cauchy, dla tego że w większości przypadków wyrażenie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest prostsze od wyrażenia $\sqrt[n]{a_n}$.

51. *Szeregi o wyrazach dodatnich malejących.*

Dotychczas zakładaliśmy tylko, że wyrazy szeregu (1)

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

są dodatnie; teraz wprowadzimy prócz tego nowe założenie, mianowicie, iż od pewnego miejsca, t. j. „prawie" zawsze, wyrazy maleją, t. j., że istnieje wskaźnik n_0 taki, że przy każdym $n > n_0$ mamy $a_{n+1} \leqslant a_n$.

Twierdzenie Abela. Jeżeli szereg (1) jest szeregiem bieżnym o wyrazach dodatnich malejących, to $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n = 0$.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Zaprzeczamy tezie, t. j. przypuszczamy, że na_n nie dąży do zera. W takim razie, jakkolwiek wielką jest liczba N, istnieją wskaźniki $n > N$ takie, że $na_n \geqslant \delta$, gdzie δ jest odpowiednio dobraną (dostatecznie małą, ale zupełnie określoną) liczbą dodatnią. Niech n_1 będzie jedną z tych wartości wskaźnika n, niech n_2 będzie inną wartością wskaźnika, większą od $2n_1$, dla której także $n_2 a_{n_2} \geqslant \delta$; $n_3 > 2n_2$, $n_4 > 2n_3, \ldots$ i t. d.; liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots$ stanowią nieskończony ciąg takich wartości wskaźnika n, dla których $na_n \geqslant \delta$. Z założeń wynika, że $n_2 - n_1 > \frac{n_2}{2}$, $n_3 - n_2 > \frac{n_3}{2}, \ldots, n_{k+1} - n_k > \frac{n_{k+1}}{2}$. Ponieważ a_n jest tem mniejsze, im n jest większe, więc

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1-1} \geqslant a_{n_1} + a_{n_1} + a_{n_1} + \ldots + a_{n_1} = n_1 a_{n_1} \geqslant \delta;$$

$$a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2-1} \geqslant a_{n_2} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_2} > \frac{n_2}{2} a_{n_2} \geqslant \frac{\delta}{2};$$

$$a_{n_2} + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3-1} \geqslant a_{n_3} + a_{n_3} + \ldots + a_{n_3};$$

lecz ta ostatnia suma równa się $(n_3 - n_2) a_{n_3}$; lecz $n_3 - n_2 > \frac{n_3}{2}$, więc $a_{n_2} + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3-1} \geqslant (n_3 - n_2) a_{n_3} > \frac{n_3}{2} a_{n_3} > \frac{\delta}{2}$ i t. d.

Z tych nierówności wynikają następujące:

$$s_{n_1-1} \geqslant \delta;\ s_{n_2-1} > \delta + \frac{\delta}{2};\ s_{n_3-1} > \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}; \ldots$$

$$s_{n_k-1} \geqslant \delta + (k-1)\frac{\delta}{2}; \ldots$$

Stąd wniosek, że sumy częściowe rosną nieograniczenie, czyli, że szereg (1) jest rozbieżny, wbrew założeniu; doszliśmy więc do sprzeczności.

Kryterjum zagęszczenia (Cauchy).

Dany jest szereg (1) o wyrazach malejących dodatnich; utwórzmy szereg

(18) $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \dots + 2^k a_{2^k} + \dots$

Szereg (1) jest zbieżny albo rozbieżny zależnie od tego, czy szereg (18) jest zbieżny lub rozbieżny.

Załóżmy, że szereg (1) jest zbieżny i niech s oznacza jego sumę; wtedy

$$a_1 = a_1;\ 2a_2 = 2a_2;\ 4a_4 < 2a_3 + 2a_4;$$
$$8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8; \dots$$
$$2^k a_{2^k} < 2a_{2^{k-1}+1} + 2a_{2^{k-1}+2} + \dots + 2a_{2^k}; \dots$$

Oznaczmy przez $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$ sumy częściowe szeregu (18); $\sigma_{k+1} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} < a_1 + + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + \dots + 2a_{2^k} < 2s$; tak więc sumy częściowe szeregu (18) są wszystkie mniejsze od $2s$; ponieważ ciąg ten jest ciągiem rosnącym, więc posiada granicę i wskutek tego szereg (18) jest zbieżny.

A więc zbieżność szeregu (1) pociąga za sobą zbieżność szeregu (18). Udowodnimy teraz, że, odwrotnie, zbieżność szeregu (18) pociąga za sobą zbieżność szeregu (1).

Załóżmy więc, że szereg (18) jest zbieżny, i niech σ oznacza jego sumę. Napiszmy nierówności, które, oczywiście, są prawdziwe:

$$a_1 = a_1;\ a_2 + a_3 < 2a_2;\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 4a_4; \dots$$
$$a_8 + a_9 + \dots + a_{14} + a_{15} < 8a_8, \dots$$
$$a_{2^k} + a_{2^k+1} + \dots + a_{2^k+(2^k-2)} + a_{2^k+(2^k-1)} < 2^k . a_{2^k};$$

Dodając do siebie te nierówności stronami, otrzymamy $s_{2^{k+1}-1} < \sigma_{k+1} < \sigma$; stąd wnioskujemy, iż wszystkie sumy częściowe szeregu (1) są mniejsze od liczby σ, t. j., że te sumy częściowe stanowią ciąg ograniczony od góry. Ponieważ oprócz tego tworzą one ciąg rosnący, więc sumy częściowe

szeregu (1) stanowią ciąg zbieżny, a więc i szereg (1) jest zbieżny.

Twierdzenie to ma wielką doniosłość, gdyż na podstawie tego kryterjum możemy udowodnić z łatwością zbieżność lub rozbieżność szeregów w przypadku, gdy poprzednio podane kryterja nie dadzą się zastosować. W ten sposób możemy otrzymać coraz to nowe kryterja; w rzeczy samej, niech Σc_n oznacza szereg, którego zbieżność może być ujawniona przy pomocy cechy zagęszczania, ale nie wynika z poprzednich kryterjów Cauchy i D'Alembert'a. Szereg zbieżny Σc_n jest szeregiem przewyższającym dla całej klasy szeregów zbieżnych; stosując twierdzenie o porównywaniu dwóch szeregów, z których jeden jest szereg $\sum\limits_n c_n$, otrzymamy nowe kryterjum zbieżności. Stosując tę metodę, dojdziemy do całego szeregu coraz dalej idących, coraz subtelniejszych kryterjów.

Przedewszystkiem przy pomocy cechy zagęszczania możemy zbadać szereg

$$(19)\qquad 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots;$$

wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy $s>0$; gdyż dla $s\leqslant 0$ szereg jest, oczywiście, rozbieżny.

Na zasadzie cechy zagęszczenia szereg (19) jest zbieżny lub rozbieżny, zależnie od tego, czy szereg zagęszczony

$$(20)\qquad 1+2\frac{1}{2^s}+4\cdot\frac{1}{4^s}+8\cdot\frac{1}{8^s}+\ldots+2^k\cdot\frac{1}{2^{ks}}+\ldots$$

jest zbieżny lub rozbieżny; lecz szereg (20) możemy napisać w postaci następującej:

$$1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{2^{2(s-1)}}+\frac{1}{2^{3(s-1)}}+\ldots+\frac{1}{2^{k(s-1)}}+\ldots$$

Widzimy więc, że szereg (20) jest poprostu postępem geometrycznym, którego wykładnikiem jest liczba $\frac{1}{2^{s-1}}$. Sze-

reg (20) jest więc zbieżny, gdy $s>1$, bo wtedy wykładnik $q=\frac{1}{2^{s-1}}$ jest mniejszy od jedności; gdy zaś $s\leqslant 1$, to szereg (20) jest rozbieżny; to samo tyczy się więc szeregu (19).

Twierdzenie. Szereg, którego wyrazami są odwrotności s^{tych} potęg kolejnych liczb szeregu naturalnego, jest zbieżny, gdy wkładnik potęgi s jest >1, rozbieżny zaś, gdy $s\leqslant 1$.

52. *Dalsze kryterja zbieżności.*

Przy pomocy kryterjum, opartego na zbadaniu $\sqrt[n]{a_n}$ nie moglibyśmy uwidocznić zbieżności ciągu (19) dla $s>1$ i jego rozbieżności dla $s\leqslant 1$; w rzeczy samej, dla szeregu (19) jest $\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s$. W tym przypadku mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s=1$ i „prawie“ wszystkie wyrazy są mniejsze od jednego.

Jest to właśnie, jak widzieliśmy (l. 50), okoliczność, która nie pozwala przy pomocy tego kryterjum rozstrzygnąć sprawę zbieżności lub rozbieżności szeregu.

Otrzymamy kryterjum dalej idące przez porównanie szeregu badanego z szeregiem (19) jako przewyższającym, mianowicie:

Jeżeli istnieje liczba $\mu>1$, taka, że „prawie“ zawsze *

$$\frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n}>\mu,\quad (a_n>0) \tag{21}$$

to szereg (19) jest szeregiem przewyższającym dla szeregu danego (1) i szereg dany jest zbieżny.

Z nierówności (21) otrzymamy:

$$\log\frac{1}{a_n}>\mu\log n,\quad \frac{1}{a_n}>n^{\mu},\quad a_n<\frac{1}{n^{\mu}};$$

* Określenie i własności logarytmu będą podane później.

a więc dla szeregu danego $\sum_n a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ szereg (19) jest szeregiem przewyższającym; ponieważ z drugiej strony $s = \mu > 1$, to w tym przypadku szereg (19) jest zbieżny, a więc i szereg $\sum_n a_n$.

Jeżeli istnieje liczba $\mu \leqslant 1$, taka, że „prawie" zawsze $\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} \leqslant \mu$, to szereg $\sum_n a_n$ jest rozbieżny.

W rzeczy samej, wtedy, $a_n \geqslant \frac{1}{n^\mu}$, a ponieważ $s = \mu \leqslant 1$, szereg (19) jest rozbieżny; szereg $\sum a_n$ począwszy od pewnego miejsca ma wyrazy większe od odpowiednich wyrazów szeregu rozbieżnego, więc sam jest rozbieżny.

Możemy, jak i poprzednio, zająć się bliższem zbadaniem ciągu*

$$(22) \qquad \frac{-\lg a_2}{\lg 2}, \quad \frac{-\lg a_3}{\lg 3}, \ldots, \quad \frac{-\lg a_n}{\lg n}, \ldots$$

którego wyrazy są „prawie" wszystkie dodatnie, ponieważ $a_n \rightarrow 0$.

Czytelnik udowodni, że szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, jeżeli najmniejsza z granic (22) jest większa od jedności; jeżeli zaś największa z granic tego ciągu jest mniejsza od jedności, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Przez ponowne zastosowanie kryterjum zagęszczenia możemy udowodnić że szereg

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu} + \frac{1}{3(\log 3)^\mu} + \ldots + \frac{1}{n(\log n)^\mu} + \ldots$$

jest zbieżny dla $\mu > 1$ i rozbieżny dla $\mu \leqslant 1$; stąd drogą porównania, t. j. przyjąwszy dany szereg jako przewyższający, otrzymamy nowe kryterjum; w ten sposób dojdziemy do nieskończonego łańcucha coraz dalej idących kryterjów. Że każde następne kryterjum jest silniejsze od poprzedniego,

* Przypuszczamy, że wyrazy $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ szeregu są różne od zera; gdyby który równy był zeru, moglibyśmy ten wyraz opuścić.

udowodnimy* później, gdyż do tego przedmiotu wrócimy jeszcze raz, gdy zapoznamy się bliżej z funkcją logarytmiczną.

Zmiana porządku wyrazów w szeregu. Szeregi bezwzględnie zbieżne.

53. Musimy przedewszystkiem ustalić dokładnie, co znaczy orzeczenie, iż dwa szeregi

(23) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(24) $$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

różnią się tylko porządkiem wyrazów. Znaczy to, że każdemu wskaźnikowi n odpowiada zupełnie określony wskaźnik n', taki, że a_n równa się $b_{n'}$ i odwrotnie, każdemu wskaźnikami m' drugiego szeregu odpowiada wskaźnik m pierwszego szeregu, taki, iż $b_{m'} = a_m$; odpowiedniość między wskaźnikami n i n' pierwszego i drugiego szeregu jest tu więc odwracalnie jednoznaczna. Taka odpowiedniość nazywa się inaczej doskonałą. Można więc krótko powiedzieć: dwa szeregi (23) i (24) różnią się tylko porządkiem wyrazów, jeżeli między wskaźnikami tych dwóch szeregów można ustalić odpowiedniość doskonałą, taką, że odpowiadające sobie w tem podporządkowaniu wzajemnem dwa wyrazy są równe. Zmienić porządek wyrazów szeregu — znaczy to, mając szereg dany, utworzyć nowy szereg, różniący się od danego tylko porządkiem wyrazów.

Będziemy mówili, że dwa szeregi (23) i (24) różnią się tylko zmianą porządku skończonej liczby wyrazów, jeżeli można tak ustalić wspomnianą powyżej odpowiedniość między wskaźnikami n i n' dwóch wyrazów obu szeregów, że, zacząwszy od pewnego miejsca, zawsze $n = n'$; wtedy „prawie“ zawsze $s_n = \sigma_{n'} = \sigma_n$, gdzie s_n i σ_n oznaczają sumy częściowe odpowiednio szeregów (23) i (24). Jeżeli więc szereg

---

* Patrz ćwiczenie N. 35.

(23) jest rozbieżny, to i szereg (24) będzie rozbieżny; jeżeli szereg (23) jest zbieżny i suma jego jest s, to i szereg (24) jest zbieżny i suma jego jest s. Otrzymany wynik wyrazić można wsposób następujący: zmiana porządku skończonej liczby wyrazów szeregu nie wpływa na zbieżność szeregu. Gdy taka okoliczność będzie zachodzić, powiemy inaczej, że „wolno" zmienić porządek wyrazów w szeregu.

Celem naszym jest dojść do podziału wszystkich szeregów zbieżnych na dwie klasy, na klasę szeregów, w których „wolno" zmieniać porządek wyrazów, i na klasę takich szeregów, w których „nie wolno" zmieniać porządku wyrazów. Zanim poznamy najobszerniejszą klasę szeregów, w których „wolno" zmieniać porządek wyrazów, udowodnimy, że szeregi, w których wszystkie wyrazy są tego samego znaku, t. j. bądź wszystkie dodatnie, bądź wszystkie ujemne, należą do tej szukanej klasy szeregów.

Twierdzenie. Jeżeli w szeregu zbieżnym wszystkie wyrazy są dodatnie, to „wolno" w nim zmienić porządek wyrazów.

Założenie: Szeregi (23) i (24) różnią się tylko porządkiem wyrazów; szereg (23) jest zbieżny. Wyrazy tego szeregu są dodatnie.

Teza: Szereg (24) jest także zbieżny i suma jego est równa sumie szeregu (23).

Dowód: Niech s_n oznacza sumę częściową n wyrazów szeregu (23), a σ_m sumę częściową m wyrazów szeregu (24). Na mocy założenia $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, przyczem ciąg $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ jest rosnący. Każdemu składnikowi b_k sumy $\sigma_m = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ odpowiada, na mocy założenia, równy mu wyraz $a_{k'}$, należący do pierwszego szeregu; gdy k przybiera wszystkie wartości całkowite od $k = 1$ do $k = m$, wskaźnik k' przybiera pewne wartości, z których niech n będzie największa. Jasna rzecz, że w takim razie $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

zawiera wszystkie te składniki, które wchodzą w skład sumy σ_m; ponieważ zawierać może oprócz tego i inne składniki, a składniki są dodatnie, więc $\sigma_m \leqslant s_n < s$; ciąg $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m, \ldots$ jest ciągiem rosnącym, ograniczonym od góry, bo $\sigma_m < s$ dla każdego m; taki ciąg posiada granicę $\lim\limits_{m \to \infty} \sigma_m = \sigma$, przyczem $\sigma \leqslant s$.

Udowodniliśmy więc, że szereg (24) jest zbieżny. Spojrzawszy na założenie, widzimy teraz, iż (24) spełnia te wszystkie warunki, które założyliśmy co do szeregu (23). Możemy powtórzyć powyższe rozumowania, zmieniwszy rolę szeregów (23) i (24); zamiast nierówności $\sigma_m < s$, otrzymamy teraz, oczywiście, $s_m < \sigma$, skąd $\lim\limits_{m \to \infty} s_m \leqslant \sigma$, a więc $s \leqslant \sigma$.

Zestawiając nierówności $\sigma \leqslant s$ i $s \leqslant \sigma$, wnioskujemy, że musi być $\sigma = s$.

Wniosek I. Ten sam dowód stosuje się w przypadku, gdy wszystkie wyrazy są ujemne. Twierdzenie możemy więc uważać za udowodnione w przypadku, gdy „prawie" wszystkie wyrazy szeregu są tego samego znaku.

Wniosek II. Jeżeli w szeregu „prawie" wszystkie wyrazy są tego samego znaku i jeżeli szereg jest rozbieżny, to przy każdem innem uporządkowaniu wyrazów tego szeregu otrzymamy szereg rozbieżny. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

54. *Szeregi bezwzględnie zbieżne.*

Szereg nazywa się bezwzględnie zbieżnym, jeżeli inny szereg, utworzony z jego wartości bezwzględnych, jest zbieżny.

Twierdząc, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ jest bezwzględnie zbieżnym, nie zakładamy wcale, że posiada on sumę, zakładamy tylko, że inny szereg, mianowicie $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$ posiada sumę, czyli jest zbieżny; okazuje się atoli, że to założenie pociąga za sobą

istnienie sumy i dla szeregu $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ W rzeczy samej, ponieważ szereg $\Sigma|a_n|$ jest zbieżny, do każdej dowolnie małej liczby dodatniej ε można tak dobrać liczbę n_0, by dla $n_2>n_1>n_0$ zachodziła zawsze nierówność:

$$|a_{n_1}|+|a_{n_1+1}|+|a_{n_1+2}|+\ldots|a_{n_2}|<\varepsilon;$$

lecz $|a_{n_1}+a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\ldots+a_{n_2}|<|a_{n_1}|+|a_{n_1+1}|+|a_{n_1+2}|+\ldots+|a_{n_2}|;$

stąd $$|a_{n_1}+a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\ldots+a_{n_2}|<\varepsilon,$$

skoro tylko $n_2>n_1>n_0$; a zatem szereg Σa_n jest zbieżny na mocy ogólnej zasady zbieżności (patrz 1. 45).

Do tego samego wniosku dojść możemy na innej drodze. Niech

$$u_n=\tfrac{1}{2}\{|a_n|+a_n\},\quad v_n=\tfrac{1}{2}\{|a_n|-a_n\};$$

gdy $a_n\geqslant 0$, to $u_n=a_n$, $v_n=0$;

gdy $a_n\leqslant 0$, to $u_n=0$, $v_n=|a_n|$;

W szeregach: $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n,\ldots$ i

$$v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n,\ldots$$

opuśćmy wyrazy, równe zeru; otrzymamy wtedy dwa nowe szeregi, których wyrazy stanowią odpowiednio wyrazy dodatnie i wartości bezwzględne wyrazów ujemnych szeregu danego Σa_n w tym uporządkowaniu, w jakiem następują po sobie w szeregu Σa_n.

Niech s_n, s'_n i s''_n oznaczają odpowiednio sumy częściowe n wyrazów szeregów Σa_n, Σu_n i Σv_n, a σ_n sumę częściową n wyrazów szeregu $\Sigma|a_n|$.

W takim razie:

$$s_n=s'_n-s''_n$$
$$\sigma_n=s'_n+s''_n \tag{25}$$

Rozróżnić możemy teraz trzy przypadki.

1) Oba szeregi o wyrazach nie ujemnych Σu_n i Σv_n są zbieżne.

2) Jeden z tych szeregów jest zbieżny, drugi rozbieżny.

3) Oba szeregi Σu_n i Σv_n są rozbieżne.

W pierwszym przypadku mamy $\lim_{n\to\infty} s'_n = s'$, $\lim_{n\to\infty} s''_n = s''$, a ze wzorów (25) wynika, iż

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = s' - s''$$
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma = s' + s''$$

Z ostatniej równości wnioskujemy, że szereg $\Sigma|a_n|$ jest zbieżny, czyli otrzymaliśmy twierdzenie następujące:

Jeżeli dwa szeregi, utworzone odpowiednio z wyrazów dodatnich i z wyrazów ujemnych szeregu Σa_n, są zbieżne, to szereg Σa_n jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie odwrotne jest także prawdziwe: jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to zbieżnemi są również dwa szeregi, utworzony jeden z dodatnich jego wyrazów, drugi z ujemnych.

Z założenia wynika bowiem, że $\sigma_n < \sigma$, a z (25) wynika, że $s'_n < \sigma_n < \sigma$ i $s''_n < \sigma_n < \sigma$; ciągi s'_n i s''_n są monotoniczne, więc granice $\lim_{n\to\infty} s'_n$ i $\lim_{n\to\infty} s''_n$ istnieją, co należało udowodnić.

Udowodnimy teraz, że dowolne przestawienie wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego nie ma żadnego wpływu ani na jego zbieżność, ani na sumę szeregu.

Na mocy założenia szeregi Σa_n i Σb_n różnią się tylko uporządkowaniem wyrazów. Utwórzmy szeregi Σx_n i Σy_n, analogiczne do szeregów Σu_n i Σv_n, posługując się szeregiem Σb_n zamiast Σa_n, to jest, kładąc $x_n = \frac{1}{2}\{|b_n| + b_n\}$, $y_n = \frac{1}{2}\{|b_n| - b_n\}$. Niech p'_n i p''_n oznaczają sumy częściowe n wyrazów szeregów Σx_n i Σy_n, a p_n — sumę częściową n wyrazów szeregu Σb_n. Mamy wtedy

$$p_n = p'_n - p''_n.$$

Szeregi Σx_n i Σu_n, o ile uwzględnimy tylko wyrazy różne od zera, składają się z tych samych wyrazów dodatnich, tylko porządek ich jest inny; tak samo szeregi Σy_n i Σv_n; stąd wniosek, iż $\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} p'_n = s'$ i $\lim s''_n = \lim p''_n = s''$; ponieważ zaś

$$s_n = s'_n - s''$$
$$p_n = p'_n - p''_n.$$

więc, przechodząc do granicy, $\lim s_n = \lim s' - \lim s''_n = s' - s''$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} p'_n - \lim\limits_{n\to\infty} p''_n = s' - s''$; ostatecznie więc

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

55. Udowodniliśmy, że w szeregach bezwzględnie zbieżnych „wolno" zmieniać porządek wyrazów. Udowodnimy teraz, że tylko szeregi bezwzględnie zbieżne posiadają tę własność. W tym celu wróćmy do szeregów Σu_n i Σv_n. Wiemy, iż zbieżność obu tych szeregów pociąga za sobą bezwzględną zbieżność szeregu Σa_n i odwrotnie. Mamy jeszcze dwie możliwości: jeżeli jeden z tych szeregów jest zbieżny, a drugi rozbieżny, to szereg dany Σa_n jest, oczywiście, rozbieżny, gdyż wtedy wartość bezwzględna sumy częściowej s_n tego szeregu na zasadzie (25) dąży do nieskończoności. Taki szereg rozbieżny będziemy nazywali bezwzględnie rozbieżnym i żadna zmiana porządku wyrazów nie może przekształcić go na szereg zbieżny.

Jeżeli wreszcie oba szeregi Σu_n i Σv_n są rozbieżne, a szereg Σa_n jest zbieżny, to szereg $\Sigma |a_n|$ jest, oczywiście, rozbieżny, a ze zmianą porządku wyrazów szeregu, jak za chwilę zobaczymy, zmieniać się będzie suma szeregu Σa_n, przyczem można nawet otrzymać tą drogą szereg rozbieżny.

W tym celu udowodnimy twierdzenie następujące: Jeżeli w szeregu Σa_n mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a szeregi Σu_n i Σv_n są oba rozbieżne, to można zawsze znaleźć takie uporządkowanie wyrazów tego szeregu, by suma szeregu równała się dowolnej liczbie α, danej zgóry. Nie zakładamy tutaj nawet zbieżności szeregu Σa_n.

Niech α będzie liczbą daną. Utwórzmy szereg z wyrazów szeregu Σa_n w sposób następujący. W szeregu Σu_n opuśćmy wyrazy równe zeru; otrzymamy wtedy zbiór

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m, \ldots$ wyrazów dodatnich szeregu Σa_n; w szeregu Σv_n opuścimy również wyrazy równe zeru; otrzymamy wtedy zbiór $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{m'}, \ldots$ wartości bezwzględnych wyrazów szeregu Σa_n. Szereg Σa_n składa się z wyrazów c_m i $-d_{m'}$, połączonych ze sobą w pewnym bliżej nas nie obchodzącym porządku. Nowy szereg utworzymy z liczb c_m i $-d_{m'}$ w sposób następujący: niech

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{\mu_1} > \alpha;$$

niech teraz μ_2 oznacza taką liczbę, by

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{\mu_1} - d_1 - d_2 - \ldots - d_{\mu_2} \leqslant \alpha,$$

lecz

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{\mu_1} - d_1 - d_2 - d_3 - \ldots - d_{\mu_2 - 1} > \alpha,$$

co jest, oczywiście, zawsze możliwe. Niech μ_3 oznacza taką liczbę, by

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{\mu_1} - d_1 - d_2 - \ldots - d_{\mu_2} + c_{\mu_1+1} + c_{\mu_1+2} + \ldots + c_{\mu_1+\mu_3} > \alpha,$$

lecz

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{\mu_1} - d_1 - d_2 - \ldots - d_{\mu_2} + c_{\mu_1+1} + c_{\mu_1+2} + \ldots + c_{\mu_1+\mu_3-1} \leqslant \alpha;$$

w ten sposób postępując dalej, dojdziemy do szeregu nieskończonego, w którym po μ_1 wyrazach (c) następuje μ_2 wyrazów (d), potem μ_3 wyrazów (c), potem μ_4 wyrazów (d) i t. d.

Niech S_k oznacza sumę częściową k wyrazów otrzymanego szeregu nieskończonego. Szereg ten składa się z tych samych wyrazów, co i szereg Σa_n, przyczem uporządkowanie jest takie, że spełnione są warunki

$$S_{\mu_1} > \alpha, \quad S_{\mu_1+\mu_2} \leqslant \alpha, \quad S_{\mu_1+\mu_2-1} > \alpha$$

$$S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3} > \alpha; \quad S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3-1} \leqslant \alpha; \quad S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} \leqslant \alpha;$$

$$S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4-1} > \alpha$$

$$S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5} > \alpha; \quad S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5-1} \leqslant \alpha \text{ i t. d.}$$

Stąd wynika, że

$$0 \leqslant \alpha - S_{\mu_1+\mu_2} < d_{\mu_2}$$

$$0 < S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3} - \alpha \leqslant c_{\mu_1+\mu_3}$$

$$0 \leqslant \alpha - S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} < d_{\mu_2+\mu_4}$$

$$0 < S_{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5} - \alpha \leqslant c_{\mu_1+\mu_3+\mu_5}$$

i t. d. A więc

$$|S_k - \alpha|$$

dąży do zera, gdy k rośnie do nieskończoności, przybierając wartości ciągu:

(26) $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \ldots$

Tak więc $\lim S_k = \alpha$, o ile k dąży do nieskończoności, przybierając ciąg tylko co wskazanych wartości. Jeżeli teraz k nie należy do wspomnianego ciągu (26), to można znaleźć w tym ciągu (26) dwa wskaźniki kolejne l i p takie, że

(27) $$S_l < S_k < S_p \text{ lub } S_l > S_k > S_p,$$

zależnie od tego, czy l zajmuje w (26) miejsce parzyste lub nieparzyste; gdy $k \to \infty$, to l i p zmierzają do nieskończoności $S_l \to \alpha$ i $S_p \to \alpha$; stąd wniosek, że $\lim\limits_{n \to \infty} S_k = \alpha$, co trzeba było udowodnić.

W poprzedzających rozumowaniach α miało wartość stałą; zamiast tego można wziąźć szereg wartości, stanowiących ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Dla udowodnienia, że przy odpowiedniem uporządkowaniu wyrazów z szeregu danego Σa_n można otrzymać szereg rozbieżny, wystarczy założyć, że ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ jest rozbieżny, i rozumować jak poprzednio. Szczegóły dowodu zostawiamy czytelnikowi.

Jeżeli szereg jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to należy do ostatniej z trzech rozpatrywanych kategorji szeregów, t. j. do szeregów, których suma zależy od porządku składników.

Zatem tylko szeregi bezwzględnie zbieżne mają sumę, wyznaczoną przez wyrazy, niezależnie od uporządkowania. Stąd wynika, jak ważną klasę stanowią szeregi bezwzględnie zbieżne; tylko dla tych szeregów pojęcie sumy jest analogiczne do sumy skończonej liczby składników.

56. *Szeregi zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne.*

Szeregi takie nazywamy niekiedy warunkowo zbieżnemi, mając na myśli, iż tym warunkiem jest stosowne

uporządkowanie wyrazów. Badanie tych szeregów jest daleko trudniejsze od badania szeregów bezwzględnie zbieżnych. W tym rozdziale dany przykład tworzenia niektórych szeregów warunkowo zbieżnych; w tym celu podamy na początku parę twierdzeń pomocniczych.

Twierdzenie pomocnicze pierwsze.

Jeżeli szereg o wyrazach dodatnich Σa_n jest zbieżny i jeśli liczby $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ stanowią ciąg ograniczony od góry i od dołu, to szereg $\Sigma a_n u_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots$ $\ldots + a_n u_n + \ldots$ jest zbieżny.

Z założenia wynika, że $|u_m| < M$ dla każdego m i że każdej dowolnie małej dodatniej liczbie ε można podporządkować taki wskaźnik n_0, iż dla $n > n_0$ i dowolnego p

$$|a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Stąd

$$|a_n u_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} u_{n+p}| < |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| M < \varepsilon$$

A więc na mocy ogólnej zasady zbieżności (patrz l. 47), szereg $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots + a_n u_n + \ldots$ jest zbieżny, co trzeba było udowodnić.

Uwaga. Czytelnik wyprowadzi jako wniosek z tylko co udowodnionego twierdzenia, że szereg jest zbieżny, jeżeli szereg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu danego jest zbieżny. Wystarczy uczynić liczby ciągu $u_1, u_2, u_3, \ldots$ odpowiednio równymi $+1$ albo -1.

Twierdzenie pomocnicze drugie.

Jeżeli $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ stanowi ciąg malejący, taki, iż $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, i jeśli sumy częściowe szeregu Σa_n stanowią ciąg ograniczony od góry i od dołu, to szereg

$\Sigma a_n u_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots$ jest zbieżny.

Wychodzimy z tożsamości:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = s_1u_1 + (s_2 - s_1)u_2$$
$$(28)\quad + (s_3 - s_2)u_3 + \ldots + (s_n - s_{n-1})u_n = s_1(u_1 - u_2) +$$
$$+ s_2(u_2 - u_3) + s_3(u_3 - u_4) + \ldots + s_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + s_nu_n,$$

gdzie, jak zwykle $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$, a więc

$$a_k = s_k - s_{k-1}.$$

Zauważmy teraz, że szereg

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) + \ldots$$

jest zbieżny, ponieważ suma częściowa n jego wyrazów równa się $u_1 - u_{n+1}$, a $\lim_{n \to \infty} u_{n+1} = 0$.

Na mocy założenia istnieje taka liczba M, iż $|s_m| < M$ dla każdej wartości m. Na zasadzie więc twierdzenia pomocniczego pierwszego, szereg

$$(29)\quad s_1(u_1 - u_2) + s_2(u_2 - u_3) + s_3(u_3 - u_4) + \ldots + s_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \ldots$$

jest zbieżny.

Lecz z (28) wynika, że suma częściowa n wyrazów szeregu Σa_mu_m równa się sumie częściowej $n - 1$ wyrazów szeregu zbieżnego (29) więcej wyraz s_nu_n. Na mocy założenia $u_n \to 0$, jak również $s_nu_n \to 0$, a zatem $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots$ $\ldots + a_nu_n$ dąży do tej samej granicy, co szereg zbieżny (29), czyli szereg Σa_nu_n jest zbieżny, jak to trzeba było udowodnić.

Uwaga. Tylko co udowodnione twierdzenie stoi w blizkim związku z tak zwanem twierdzeniem pomocniczem Abela:

Jeżeli liczby dodatnie $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ tworzą ciąg malejący i jeżeli wszystkie sumy częściowe szeregu $\Sigma a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots$ są zawarte między liczbami A i B, to suma $\sum_{k=1}^{n} u_ka_k$ czyli $u_1a_1 + u_2a_2 + \ldots + u_na_n$ spełnia nierówność

$$Au_1 < \sum_{k=1}^{n} u_ka_k < Bu_1$$

W rzeczy samej.

(30) $u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3+\ldots+u_na_n=(u_1-u_2)s_1+(u_2-u_3)s_2+$
$+(u_3-u_4)s_3+\ldots+(u_{n-1}-u_n)s_{n-1}+u_ns_n,$

gdzie $s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ldots,\ s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n;$
ponieważ ciąg $u_1, u_2,\ldots, u_n,\ldots$ jest malejący, wszystkie różnice $u_1-u_2,\ u_2-u_3,\ u_3-u_4,\ u_{n-1}-u_n$ są dodatnie, a więc z (30)

$$u_1a_1+u_2a_2+\ldots+u_na_n<B\{(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4)+\ldots$$
$$\ldots+(u_n-u_{n-1})+u_n\},\text{ t. j. } u_1a_1+u_2a_2+\ldots+u_na_n<Bu_1.$$

Tak samo wynika z (30), że

$$u_1a_1+u_2a_2+\ldots+u_na_n>A\{(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4)+\ldots$$
$$\ldots+(u_n-u_{n-1})+u_n\},$$

czyli $$u_1a_1+u_2a_2+\ldots+u_na_n>Au_1$$

Wniosek: Jeżeli wyrazy szeregu są kolejno dodatnie i ujemne, a ich wartości bezwzględne tworzą ciąg malejący, dążący do zera, to szereg jest zbieżny.

Wystarczy zastosować twierdzenie pomocnicze drugie, przyczem bierzemy $a_n=(-1)^{n+1}$; sumy częściowe szeregu Σa_n są w tym przypadku ograniczone od góry i od dołu. Jeżeli liczby dodatnie $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n,\ldots$ tworzą ciąg male jący i $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, to jak wiemy, szereg Σa_nu_n jest zbieżny; ponieważ $a_n=(-1)^{n+1}$, więc Σa_nu_n daje nam szereg:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2p-1}-u_{2p}+\ldots$$

Taki szereg nazywają niekiedy przemiennym.

Zbieżność szeregu przemiennego, gdy spełnione są wspomniane tylko co warunki, ustalić można także i bezpośrednio.

$$s_{2p}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2p-1}-u_{2p});$$

ponieważ różnice w nawiasach są wszystkie dodatnie, więc

(31) $$s_2<s_4<s_6<\ldots<s_{2p}<s_{2p+2}<\ldots,$$

czyli sumy częściowe o parzystych wskaźnikach tworzą ciąg rosnący.

$$s_{2p+1}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2p}-u_{2p+1});$$

więc

(32) $$s_1>s_3>s_5>\ldots>s_{2p-1}>s_{2p+1}>\ldots,$$

czyli sumy częściowe o wskaźnikach nieparzystych tworzą ciąg malejący. Zauważymy dalej, że

(33) $$s_{2p} < s_{2p-1} < s_1$$

(34) $$s_{2p+1} > s_{2p} > s_2$$

Na zasadzie (33) ciąg rosnący (31) jest ograniczony od góry, posiada więc granicę $\lim\limits_{p \to \infty} s_{2p} = s$; tak samo na mocy (34) ciąg malejący (32) jest ograniczony od dołu, posiada więc granicę $\lim\limits_{p \to \infty} s_{2p+1} = \sigma$. Lecz $s_{2p+1} - s_{2p} = u_{2p+1}$; przechodząc do granicy, mamy:

$$\lim_{p \to \infty} s_{2p+1} - \lim_{p \to \infty} s_{2p} = \lim_{p \to \infty} u_{2p+1};$$

ponieważ $\lim\limits_{p \to \infty} s_{2p+1} = \sigma$, $\lim\limits_{p \to \infty} s_{2p} = s$, $\lim\limits_{p \to \infty} u_{2p+1} = 0$, więc

$$\sigma - s = 0, \text{ czyli } \sigma = s.$$

Przy pomocy twierdzenia o zbieżności szeregu przemiennego łatwo uzasadnić następujące przykłady na szeregi warunkowo zbieżne.

Przykłady:

1) Szereg $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$

jest zbieżny, bo jest to szereg przemienny, w którym wartość bezwzględna składników tworzy ciąg malejący, dążący do zera, gdyż wartość bezwzględna ogólnego wyrazu jest $\frac{1}{n}$.

Szereg ten nie jest jednak bezwzględnie zbieżny, gdyż ciąg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów tego szeregu, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ jest rozbieżny; istotnie, jest to szereg harmoniczny (l. 44).

2) Szereg $\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \ldots$

jest zbieżny na tej samej podstawie, co poprzednio; ponieważ w szeregu $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

wyrazy są, począwszy od drugiego miejsca, większe od odpowiednich wyrazów szeregu harmonicznego, więc ten drugi szereg jest rozbieżny.

3) Szereg $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots$

$\dots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\dots$ jest rozbieżny, gdyż sumy częściowe $s_{2p}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\dots$

$$\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{p+1}+1}\right)=2\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}\right\},$$

pomimo, że to jest szereg przemienny, w którym wartość bezwzględna wyrazu ogólnego dąży do zera; nie powinno to nas dziwić gdyż ciąg

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1}{\sqrt{3}-1},\ \frac{1}{\sqrt{3}+1},\ \frac{1}{\sqrt{4}-1},\ \frac{1}{\sqrt{4}+1},\dots$$

nie jest malejący. Gdybyśmy liczby tego ciągu uporządkowali w ten sposób, by otrzymać ciąg malejący i następnie utworzyli szereg przemienny

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}+\dots$$

$$\dots-\frac{1}{\sqrt{11}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{12}+1}+\frac{1}{\sqrt{13}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots,$$

to otrzymalibyśmy szereg warunkowo zbieżny.

4) Szereg

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^s}+\dots$$

jest rozbieżny, gdy $s\leqslant 0$; jest warunkowo zbieżny, gdy wykładnik s spełnia warunek $0<s\leqslant 1$; jest bezwzględnie zbieżny, gdy $s>1$.

Uwaga. Szeregi przemienne, któremi zajmowaliśmy się przed chwilą, należą do kategorji szeregów, w których

wartość bezwzględna reszty mniejsza jest od wartości bezwzględnej ostatniego uwzględnionego wyrazu. W rzeczy samej, niech s oznacza sumę szeregu przemiennego $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, w którym $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ i $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.
Jak widzieliśmy s jest zawarte między dwoma kolejnemi sumami częściowemi s_{2p} i s_{2p+1}, t. j. $s_{2p} > s > s_{2p+1}$ dla każdej wartości p. Stąd

$$0 < s_{2p-1} - s < s_{2p-1} - s_{2p}, \text{ lecz } s_{2p-1} - s_{2p} = u_{2p},$$

$$0 < s - s_{2p} < s_{2p+1} - s_{2p}, \text{ lecz } s_{2p+1} - s_{2p} = u_{2p+1},$$

czyli

$$s_{2p-1} - u_{2p} < s < s_{2p-1}$$

$$s_{2p} < s < s_{2p} + u_{2p+1},$$

albo inaczej:

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2p-1} - \theta . u_{2p}$$

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2p} + \theta . u_{2p+1},$$

gdzie θ oznacza liczbę, zawartą między 0 a 1, t. j. $0 < \theta < 1$.

Wprowadzając resztę (patrz l. 47), możemy otrzymany wynik wyrazić jeszcze w sposób następujący: kładąc $s = s_n + R_n$, $|R_n| < u_{n+1}$, czyli $|R_n| = \theta . u_{n+1}$, niezależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy nieparzystą. Innemi słowy, jeżeli zamiast sumy szeregu weźmiemy sumę jego n pierwszych wyrazów kolejnych (t. j. sumę częściową s_n), to popełnimy błąd R_n, który co do wartości bezwzględnej jest mniejszy od u_{n+1}, a więc tembardziej mniejszy od u_n, t. j od wartości bezwzględnej ostatniego z kolei składnika sumy s_n.

57. *Działania nad szeregami.*

Dodawanie szeregów.

Gdy dane są dwa szeregi:

(35) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(36) $$b_1 + b_2 + a_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

to szereg

(37) $$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

nazywamy sumę dwóch szeregów (35) i (36).

Jeżeli szeregi (35) i (36) są zbieżne, to zbieżnym jest i szereg (37) i suma tego szeregu równa się sumie pierwszego z tych szeregów więcej suma drugiego.

W rzeczy samej, niech s_n, σ_n i S_n oznaczają sumy częściowe odpowiednio szeregów (35), (36) i (37); według założenia $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$; z drugiej strony

$$S_n = s_n + \sigma_n;$$

przechodząc do granicy, otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s + \sigma,$$

co dowodzi, że szereg (37) jest zbieżny i suma jego równa się $s + \sigma$.

Jasna rzecz, że zamiast dwóch szeregów składowych (35) i (36) może być ich więcej, np. trzy, cztery, i t. d., w każdym razie liczba skończona; w każdym z tych przypadków stosować się będzie twierdzenie, analogiczne do udowodnionego. Jeżeli szeregi (35) i (36) są bezwzględnie zbieżne, to i szereg (37) jest także bezwzględnie zbieżny.

Analogiczne określenie i twierdzenie stosuje się do odejmowania szeregów; w szczegóły nie ma potrzeby wchodzić, gdyż między dodawaniem a odejmowaniem szeregów istotnej różnicy niema.

Mnożenie szeregów.

Działanie, przy pomocy którego z szeregów (35) i (36) tworzymy szereg

(38) $$a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$$

którego wyraz ogólny jest

$$a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-2} b_3 + \dots + a_2 b_{n-1} + a_1 b_n,$$

nazywa się mnożeniem szeregów. Dla skrócenia szereg (38) oznaczać będziemy przez Σc_n, tak, iż $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = (a_2 b_1 + a_1 b_2)$, $c_3 = (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3)$, i t. d.

Przy mnożeniu szeregów mogą zachodzić okoliczności bardziej złożone, niż przy dodawaniu szeregów; naprzykład,

może się zdarzyć, że szeregi (35) i (36) są zbieżne, ale szereg (38) jest rozbieżny. Taka okoliczność zajść może zresztą, jak zaraz zobaczymy tylko wtedy, gdy oba szeregi są warunkowo zbieżne, ale i to nie zawsze.

Dla przykładu utwórzmy szereg, który powstaje przez mnożenie szeregu zbieżnego (warunkowo)

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\dots$$

przez siebie (podnoszenie do drugiej potęgi). W tym przypadku $a_n=b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, wyraz zaś ogólny szeregu (38) daje:

$$(39)\qquad |c_n|=\frac{1}{\sqrt{1\,n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{3(n-2)}}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{\sqrt{x(n+1-x)}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n.1}}$$

$$x(n+1-x)=-x^2+(n+1)x=\tfrac{1}{4}\{(n+1)^2-[2x-(n+1)]^2\}$$

Maximum trójmianu $-x^2+(n+1)x$ zachodzi dla $x=\frac{n+1}{2}$ i równa się $\frac{1}{4}(n+1)^2$; a więc $x(n+1-x)\leqslant\frac{1}{4}(n+1)^2$, $\sqrt{x(n+1-x)}\leqslant\frac{1}{2}(n+1)$, $\frac{1}{\sqrt{x(n+1-x)}}\geqslant\frac{2}{n+1}$ dla każdej wartości x w przedziale od $x=1$ do $x=n$.

Wyraz ogólny $|c_n|$, jak wynika z (39), jest sumą wyrazów, z których każdy jest nie mniejszy od $\frac{2}{n+1}$; stąd $|c_n|\geqslant\frac{2n}{n+1}$; z nierówności tej wnioskujemy, że w szeregu Σc_n wyraz ogólny nie dąży do zera, gdy $n\to\infty$, czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności (I. 46). Niech λ oznacza dowolną liczbę dodatnią mniejszą od 2; na zasadzie nierówności $|c_n|\geqslant\frac{2n}{n+1}$ możemy nawet twierdzić,

że w szeregu $\Sigma|c_n|$ prawie wszystkie wyrazy są większe od λ.

Jeżeli weźmiemy $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, to otrzymany szereg Σc_n będzie zbieżny (patrz ćwiczenia N. 30 i 31).

Iloczyn dwóch szeregów zbieżnych może być szeregiem rozbieżnym, jak przekonaliśmy się przed chwilą; lecz jeśli iloczyn ten jest szeregiem zbieżnym, to suma tego szeregu musi się równać iloczynowi sum dwóch omawianych szeregów. Twierdzenia tego dowiódł Abel. Wskazówki, tyczące się dowodu tego twierdzenia czytelnik znajdzie w dziale ćwiczeń i zadań, patrz ćwiczenie N. 30.

W tym miejscu udowodnimy, że iloczyn dwóch szeregów zbieżnych, z których jeden przynajmniej jest *bezwzględnie zbieżny*, jest zawsze szeregiem zbieżnym i suma tego szeregu równa się iloczynowi sum tych dwóch omawianych szeregów (twierdzenie Cauchy-Mertensa). Zakładamy, iż szeregi (35) i (36) są zbieżne, przyczem np. pierwszy z nich, t. j. (35) jest nadto bezwzględnie zbieżny.

Oznaczmy przez s_n, σ_n i S_n sumy częściowe n wyrazów szeregów (35), (36) i (38) i utwórzmy różnicę $S'_n = S_{2n} - s_n \sigma_n$, którą uporządkujemy według porządku wskaźników litery a.

$$S'_n = (c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= a_1(b_{n+1} + \ldots + b_{2n}) + a_2(b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n-1}) + \ldots + a_{n-1} b_{n+1} +$$
$$+ a_{n+1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) + a_{n+2}(b_1 + b_2 + \ldots b_{n-2}) + \ldots + a_{2n} b_1;$$

a więc, oznaczając dla skrócenia przez α_k wartość bezwzględną wyrazu a_k, czyli, kładąc $\alpha_k = |a_k|$,

$$(40) \quad |S'_n| < \alpha_2 . |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n}| + \alpha_2 . |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n+1}| + \ldots$$
$$+ \alpha_{n-1} . |b_{n+1}| +$$
$$+ \alpha_{n+1} . |b_2 + b_2 + \ldots + b_{n-1}| + \alpha_{n+2} . |b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2}| + \ldots .$$
$$+ \alpha_{2n} . |b_1|$$

Ponieważ szereg (35) jest bezwzględnie zbieżny, więc można znaleźć taką liczbę M, iż suma

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|$$

jest mniejsza od M dla każdej wartości wskaźnika m.

Ponieważ szereg (36) jest zbieżny, więc można znaleźć taką liczbę M', iż dla każdej wartości m

$$|b_1+b_2+b_3+\ldots+b_m|<M'.$$

Niech ε oznacza liczbę dodatnią, dowolnie małą; do liczby ε możemy dobrać taką liczbę n_0, iż dla każdego $n>n_0$ i dla każdego p

$$(41) \qquad \alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}<\frac{\varepsilon}{M+M'}$$

$$(42) \qquad |b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{M+M'}$$

wynika to ze zbieżności odpowiednich szeregów. Uwzględniając (42), z nierówności (40) otrzymamy:

$$|S'_n|<(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\frac{\varepsilon}{M+M'}+M'(\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n}),$$

skąd dalej

$$|S'_n|<M\frac{\varepsilon}{M+M'}+M'\frac{\varepsilon}{M+M'}, \text{ czyli } |S'_n|<\varepsilon$$

Ponieważ

$$S'_n=S_{2n}-s_n\sigma_n, \text{ więc } \lim_{n\to\infty}(S_{2n}-s_n\sigma_n)=0,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}s_n\,.\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s\,.\,\sigma$$

t. j. sumy częściowe parzystej liczby składników szeregu (38) dążą do granicy $s.\sigma$.

Oznaczmy przez S''_n różnicę $S_{2n+1}-s_{n+1}.\sigma_{n+1}$; przy pomocy analogicznego rachunku dojdziemy do wniosku, że $\lim\limits_{n\to\infty}S''_n=0$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=s.\sigma$.

Stąd wniosek, że szereg (38) jest zbieżny i że suma jego równa się $s.\sigma$, jak trzeba było udowodnić.

Jeżeli nie tylko szereg (35), ale i szereg (36) są bezwzględnie zbieżne, to szereg (38) będzie nie tylko zbieżny,

ale nawet także bezwzględnie zbieżny. Dowód, jako bardzo łatwy, zostawiamy czytelnikowi.

58. *Szeregi podwójne.*

Są to szeregi, których składniki dane nam są w postaci ciągu podwójnego:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Oznaczymy przez s_{mn} sumę wyrazów zawartych w m wierszach i n kolumnach poprzedniej tablicy, t. j.

$$s_{mn} = (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn})$$

Szereg podwójny nazywa się zbieżnym, jeśli suma s_{mn} dąży do określonej granicy s, gdy m i n dążą do nieskończoności, niezależnie od prawa, według którego rosną m i n. W przeciwnym razie szereg nazywa się rozbieżnym.

Możemy naprzykład przejść do granicy w następujący sposób, który nazywamy sumowaniem wierszami: tworzymy naprzód sumy wyrazów pierwszego, drugiego wiersza i t. d., t. j.

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} + \ldots = s_1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2n} + \ldots = s_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots + a_{mn} + \ldots + s_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Następnie tworzymy szereg $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_m + \ldots$ Zauważymy, iż

$$s_1 = \lim_{n \to \infty} s_{1n}, \quad s_1 + s_2 = \lim_{n \to \infty} s_{2n}, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_m = \lim_{n \to \infty} s_{mn},$$

tak iż suma szeregu $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \lim\limits_{m \to \infty} \left(\lim\limits_{n \to \infty} s_{mn} \right)$; oczywiście, przyjmujemy, iż wszystkie granice, o których tu mowa, istnieją.

Możemy przejść do granicy podwójnego szeregu, sumując kolumnami, t. j. tworzymy naprzód sumy wyrazów pierwszej, drugiej kolumny i t. d., czyli

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{21} + a_{31} + \ldots + a_{m1} + \ldots = \sigma_1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} + \ldots + a_{m2} + \ldots = \sigma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} + a_{2n} + a_{3n} + \ldots + a_{mn} + \ldots = \sigma_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Następnie tworzymy szereg $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n + \ldots$, którego suma, o ile istnieje, równa się oczywiście $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\lim\limits_{m \to \infty} s_{mn} \right)$.

Widzimy, iż sumowanie szeregów podwójnych jest w ścisłym związku z sumą nieskończonej liczby szeregów. Jeżeli szereg podwójny jest zbieżny, to oba wyżej wymienione sposoby powinny dać tę samą sumę, t. j.

$$\lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} s_{mn} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} s_{mn} \right) = s;$$

ale i każdy inny sposób sumowania powinien dać tę samą granicę; tak, np. także $\lim s_{nn} = s$ i t. d.

Łatwo dać przykład stwierdzający tę okoliczność, że sumowanie wierszami, może dać liczbę inną, niż sumowanie kolumnami, tak, iż z istnienia jednej z tych sum nie można wnioskować, iż szereg podwójny jest zbieżny. Może się nawet zdarzyć, iż sumowanie wierszami i kolumnami daje tę samą sumę, ale sumowanie według innego prawa daje co innego.

Dla utworzenia odpowiednich przykładów, zauważmy, iż znając wyrażenie sum częściowych s_{mn} w zależności od m i n, można z łatwością odtworzyć składniki a_{mn} odpo-

wiedniego szeregu podwójnego. Mianowicie czytelnik sprawdzi, iż $a_{11}=s_{11}$

$$a_{m1}=s_{m,1}-s_{m-1,1}$$
$$a_{1n}=s_{1n}-s_{1,n-1}$$
$$a_{m,n}=s_{mn}-s_{m,n-1}-s_{m-1,n}+s_{m-1,n-1}, \text{ dla } m>1,\ n>1$$

Niech, np. $s_{mn}=\frac{m-n}{m+n}$; obliczmy, jak wyżej, wyrazy $a_{m,n}$ i napiszmy odpowiedni szereg podwójny. Sumowanie wierszami da nam $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m-n}{m+n}\right)=-1$,

sumowanie zaś kolumnami da nam

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m-n}{m+n}\right)=+1,$$

natomiast $\lim s_{n\,n}=0$.

Jeżeli $s_{mn}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$, to sumowanie wierszami i kolumnami daje tę samą sumę 1, sumowanie zaś według prawa

$$\lim_{n\to\infty} s_{n,n} \text{ daje } \tfrac{1}{2}.$$

Czytelnik z łatwością ułoży szereg podobnych przykładów. Wobec tych przykładów zrozumiemy wagę następującego twierdzenia:

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu podwójnego są dodatnie, i jeżeli istnieje suma według wierszy (albo według kolumn), to szereg jest zbieżny i sumowanie według każdego innego prawa da tę samą granicę.

Założenie: $a_{m,n}>0$ dla każdej pary wskaźników m, n; $s_1+s_2+s_3+\ldots+s_m+\ldots$ jest szeregiem zbieżnym, którego suma równa się s.

Przekonajmy się naprzód, że sumowanie kolumnami da tę samą granicę.

$$a_{1n}+a_{2n}+a_{3n}+\ldots+a_{mn}<s_1+s_2+s_3+\ldots+s_m,$$

gdyż $$a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{mn}<s_{mn},$$

przyczem s_{mn} przy stałym m rośnie wraz z n, gdyż składniki są wszystkie dodatnie; z tego powodu

$$s_{mn} < \lim_{n \to \infty} s_{mn}; \text{ lecz } \lim_{n \to \infty} s_{mn} = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m < s$$

na mocy twierdzenia o granicy przy dodawaniu skończonej liczby składników; tak więc

$$a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn} < s;$$

oznaczmy $a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn}$ przez u_{mn}; ciąg

$$u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}, \ldots, u_{mn}, \ldots$$

jest rosnący i ograniczony od góry, a więc posiada granicę, którą oznaczymy przez σ_n.

Wyrazy należące do tej samej kolumny, tworzą więc szeregi zbieżne.

Udowodnimy teraz, że szereg $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n + \ldots$ jest zbieżny; w tym celu zauważmy, iż

$$s_{mn} = u_{m1} + u_{m2} + \ldots + u_{mn} < s_1 + s_2 + \ldots + s_m < s$$

$$\lim_{m \to \infty} s_{m,n} = \lim_{m \to \infty} u_{m,1} + \lim_{m \to \infty} u_{m2} + \ldots + \lim_{m \to \infty} u_{m,n} < s$$

lecz $\lim\limits_{m \to \infty} u_{m1} = \sigma_1, \lim\limits_{m \to \infty} u_{m2} = \sigma_2, \ldots, \lim\limits_{m \to \infty} u_{mn} = \sigma_n,$

tak, iż $\lim\limits_{m \to \infty} s_{m,n} = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n < s.$

Szereg $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n + \ldots$ jest ograniczony od góry i posiada wyrazy dodatnie; taki szereg, jak wiemy jest zbieżny i posiada sumę $\sigma \leqslant s$, (patrz l. 47).

Tak więc, sumując według kolumn, mamy granicę σ; możemy teraz wyjść z założenia, iż $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots$ $\ldots + \sigma_n \ldots = \sigma$ zamiast $s_1 + s_2 + s_3 \ldots + s_m + \ldots = s$ i rozumując w sposób analogiczny do poprzedniego, otrzymamy $s \leqslant \sigma$ zamiast $\sigma \leqslant s$. Zestawiając te dwa wyniki, widzimy iż $s = \sigma$, co trzeba było udowodnić.

Łatwo się przekonać, iż każdy inny sposób sumowania da tę samą sumę s. Niech $v_{mn} = a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn}$, w takim razie $s_{m,n} = v_{1n} + v_{2n} + \ldots + v_{mn}$, przyczem $v_{mn} < s_m$;

ze zbieżności szeregu $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n + \ldots$ wynika, iż do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę ν, iż $s_{\nu+1} + s_{\nu+2} + \ldots + s_m < \frac{1}{3}\varepsilon$, jakkolwiek wielką jest liczba $m > \nu$; ponieważ $v_{mn} < s_m$, więc i

$$(43) \qquad v_{\nu+1,n} + v_{\nu+2,n} + v_{\nu+3,n} + \ldots + v_{m,n} < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

dla każdej wartości n i dla $m > \nu$.

Ponieważ $s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots = s$, więc przy dostatecznie wielkim wskaźniku ν, mamy

$$(44) \qquad |s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu - s| < \tfrac{1}{3}\varepsilon;$$

liczba ν jest ustalona przez powyższe warunki (43) i (44).

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} (v_{1n} + v_{2n} + \ldots + v_{\nu n}) = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu,$$

więc można znaleźć taką liczbę μ, iż $n > \mu$ pociąga nierówność

$$(45) \qquad |v_{1n} + v_{2n} + \ldots + v_{\nu n} - (s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

z zestawienia (43), (44) i (45) wynika

$$|v_{1n} + v_{2n} + v_{3n} + \ldots + v_{\nu n} + v_{\nu+1,n} + v_{\nu+2,n} + \ldots + v_{m,n} - s| < \varepsilon,$$

czyli

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon;$$

skoro tylko $m > \nu$ i $n > \mu$, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, czyli $s_{m,n}$ dąży do granicy s, gdy m i n dążą jednocześnie do nieskończoności według dowolnego prawa.

Udowodnioną własność można, oczywiście, rozciągnąć na szeregi, których wyrazy są „prawie“ wszystkie tego samego znaku.

Twierdzenie o porównywaniu dwóch szeregów stosuje się także do szeregów podwójnych o wyrazach dodatnich: jeżeli wszystkie wyrazy pierwszego szeregu podwójnego są mniejsze od odpowiednich wyrazów drugiego szeregu podwójnego, i jeśli ten drugi szereg jest zbieżny, to i pierwszy także jest zbieżny.

Szereg podwójny nazywa się bezwzględnie zbieżnym, jeśli inny szereg podwójny, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu danego jest zbieżny. Łatwo sprawdzić, że bezwzględna zbieżność pociąga za sobą zbieżność szeregu danego; jeżeli szereg podwójny dany zawiera nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, to tworzymy nowy szereg podwójny, którego wyrazy równają się odpowiednio wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu danego; jeżeli w ten sposób utworzony szereg podwójny okaże się zbieżnym, to szereg dany jest bezwzględnie zbieżny i możemy obliczyć sumę jego bądź przez sumowanie wierszami, bądź przez sumowanie kolumnami, bądź to przez sumowanie według jakiegokolwiek innego prawa, gdyż przy każdym z tych sposobów musimy otrzymać tę samą granicę. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

59. *Iloczyny nieskończone.*

Jak teorja szeregów prowadzi do uogólnienia pojęcia sumy, tak teorja iloczynów nieskończonych jest uogólnieniem pojęcia iloczynu w przypadku, gdy liczba czynników jest nieskończona.

Przypuśćmy, iż mamy ciąg czynników

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots;$$

utwórzmy iloczyny częściowe

$$P_1 = v_1, \; P_2 = v_1 v_2, \; P_3 = v_1 . v_2 . v_3, \ldots$$
$$P_n = v_1 . v_2 . v_3 \ldots, v_n$$

Jeżeli istnieje granica tych iloczynów częściowych P_n, gdy n rośnie do nieskończoności, i równa się P, to mówimy, iż iloczyn nieskończony

$$v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \ldots$$

jest zbieżny i równa się P, gdzie, jak zaznaczyliśmy,

$$P = \lim_{n \to \infty} P_n,$$

co piszemy także w postaci

$$P = v_1 . v_2 . v_3 \dots v_n \dots$$

Można z łatwością związać teorję iloczynów nieskończonych z teorją szeregów. Tak, np., niech $a_1 = v_1$, $a_2 = P_2 - P_1 = v_1(v_2 - 1)$, $a_3 = P_3 - P_2 = v_1 v_2 (v_3 - 1), \dots$, $a_n = v_1 v_2 \dots, v_{n-1}(v_n - 1), \dots$ jasna rzecz, że P jest sumą szeregu

(46) $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

ponieważ suma częściowa n wyrazów tego szeregu równa się właśnie P_n.

Zauważymy także, iż

$$\log P_n = \log v_1 + \log v_2 + \log v_3 + \dots + \log v_n,$$

a więc $\log P$ jest sumą szeregu

(47) $$\log v_1 + \log v_2 + \log v_3 + \dots + \log v_n + \dots$$

Zbieżność szeregu (47) jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym, by iloczyn

$$v_1 . v_2 . v_3 \dots v_n \dots$$

był zbieżny i posiadał *wartość różną od zera.*

Przypadek, gdy $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = 0$ różni się pod niektórymi względami od przypadku, gdy $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P \neq 0$, i dlatego będziemy mówili, że iloczyn nieskończony jest zbieżny, bez dodatkowych omówień, tylko w tym przypadku, gdy granica $\lim P_n$ nie równa się zeru; inną kategorję iloczynów będą stanowiły dla nas te, w których $\lim P_n = 0$; wreszcie trzecią i ostatnią kategorję będą stanowiły iloczyny nieskończone rozbieżne.

Jeżeli iloczyn jest zbieżny (a więc $\lim P_n = P \neq 0$), to v_n dąży do jedności. Wynika to stąd, iż wtedy szereg (47) jest zbieżny, a więc jego wyraz ogolny $\log v_n$ dąży do zera, czyli $\lim v_n = 1$ Albo (46) inaczej $a_n = P_n - P_{n-1} = P_{n-1}(v_n - 1)$; ponieważ szereg Σa_n jest zbieżny, więc $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, czyli

$$\lim_{n\to\infty}(v_n-1)P_{n-1}=\lim_{n\to\infty}(v_n-1)\,.\,\lim_{n\to\infty}P_{n-1}=0;$$

ponieważ zakładamy, iż

$$\lim_{n\to\infty}P_n\neq 0,\ \text{więc}\ \lim_{n\to\infty}(v_n-1)=0,\ \text{czyli}\ \lim_{n\to\infty}v_n=1.$$

Jeżeli iloczyn nieskończony równa się zeru, to v_n może nie dążyć do jedności; granica może być inna, albo wcale może nie być granicy; np. jeżeli $v_n=\frac{1}{n}$, to $\lim_{n\to\infty}P_n=0$ i $\lim v_n=0$; jeżeli $v_n=\frac{1}{2n}\left\{n+(-1)^{n-1}(n-2)\right\}$, to $\lim P_n=0$, lecz v_n nie dąży do żadnej granicy.

My zajmować się będziemy głównie przypadkiem, gdy iloczyn jest zbieżny, t. j. gdy $\lim_{n\to\infty}P_n=P\neq 0$; z tego powodu wygodnie nam będzie wprowadzić różnicę v_n-1, którą oznaczymy przez u_n, tak, iż $v_n=1+u_n$, gdzie $u_n\to 0$.

Naprzód zbadajmy przypadek, gdy wszystkie liczby u_n są dodatnie.

Zauważmy, iż

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots(1+u_n)=$$
$$=1+u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3+\dots$$

ponieważ wszystkie u_n są >0, więc

$$P_n>1+s_n,$$

gdzie $s_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$ jest sumą częściową szeregu

(48) $$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

Z drugiej strony

$$\sigma_2=u_1u_2+u_1u_3+\dots+u_{n-1}u_n<\frac{s_n^2}{2},$$

gdzie z lewej strony ostatniej nierówności występuje suma wszystkich możliwych iloczynów z liczb $u_1, u_2, \dots u_n$ po dwa.

Tak samo, jeżeli σ_3 oznacza sumę wszystkich możli-

wych iloczynów z tychże liczb po trzy, to, jak łatwo sprawdzić,

$$\sigma_3 < \frac{s_n^3}{3!};$$

jeżeli σ_p, przyczem $p \leqslant n$, oznacza sumę wszystkich możliwych iloczynów z liczb $u_1, u_2, \ldots, u_n$ po p czynników, to

$$\sigma_p < \frac{s_n^p}{p!}*$$

Otóż

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots(1+u_n) = 1+s_n+\sigma_2+\sigma_3+\ldots+\sigma_n,$$

a więc

$$P_n < 1+s_n+\frac{s_n^2}{2!}+\frac{s_n^3}{3!}+\ldots+\frac{s_n^n}{n!}$$

czyli

$$(49) \qquad 1+s_n < P_n < 1+s_n+\frac{s_n^2}{2!}+\frac{s_n^3}{3!}+\ldots+\frac{s_n^n}{n!}$$

Twierdzenie:

Iloczyn nieskończony $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots(1+u_n)\ldots$, w którym wyrazy u_n są dodatnie, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg (48) jest zbieżny.

Twierdzenie to wynika z nierówności (49). W rzeczy samej, ponieważ liczby u_n są dodatnie, iloczyny częściowe P_n tworzą ciąg rosnący; jeżeli więc okażemy, iż ciąg ten jest ograniczony od góry, to tem samem udowodnimy, iż iloczyn nieskończony jest zbieżny.

Załóżmy więc, że szereg (48) jest zbieżny; w takim razie ciąg jego sum częściowych jest ograniczony od góry, czyli istnieje taka liczba M, iż

$$s_n < M, \text{ dla każdego } n.$$

Z nierówności (49) wynika nierówność

$$P_n < 1+M+\frac{M^2}{2!}+\frac{M^3}{3!}+\ldots+\frac{M^n}{n!} < A,$$

---

* Dowód przez indukcję. W iloczynie $s_n^p = s_n \cdot s_n \cdot s_n \ldots s_n$.

gdzie A nie zależy od wskaźnika n i jest sumą szeregu nieskończonego $1+M+\frac{M^2}{2!}+\ldots+\frac{M^n}{n!}+\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$, który jest zbieżny (patrz l. 48, przykład drugi).

Z nierówności $P_n<A$ dla każdego n wynika zbieżność iloczynu nieskończonego, t. j. istnienie $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

Odwrotnie, założmy, że iloczyn jest zbieżny; w takim razie iloczyny częściowe P_n są ograniczone od góry, t. j. spełniona jest nierówność $P_n<M$ dla każdego n, o ile odpowiednio dobierzemy liczbę M. Z nierówności (49) wynika

$$s_n < P_n - 1, \text{ czyli } s_n < M - 1;$$

sumy częściowe szeregu (48) są więc ograniczone od góry, a ponieważ ciąg ten jest rosnący, więc $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ istnieje, a zatem szereg (48) jest zbieżny.

Iloczyny nieskończone bezwzględnie zbieżne.

Zajmiemy się teraz iloczynami.

$$(50) \qquad (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots(1+u_n)\ldots,$$

w których liczby u_n mogą być i dodatnie i ujemne.

Jeżeli szereg (48) jest bezwzględnie zbieżny, to iloczyn nieskończony (50) nazwiemy bezwzględnie zbieżnym.

To określenie można zastąpić następującem: iloczyn nazywa się bezwzględnie zbieżnym, jeśli inny iloczyn, utworzony z danego przez zastąpienie liczb $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ przez ich wartości bezwzględne jest zbieżny.

Twierdząc, iż iloczyn (50) jest bezwzględnie zbieżny, stwierdzamy tylko zbieżność innego iloczynu, należy więc udowodnić, że iloczyn bezwzględnie zbieżny jest zbieżny w znaczeniu, jakie nadaliśmy temu terminowi na początku tego rozdziału; niech $w_n = |u_n|$; twierdząc, że iloczyn (50) jest bezwzględnie zbieżny, stwierdzamy zbieżność szeregu o wyrazach dodatnich:

(51) $$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots$$

stąd wynika, że iloczyn nieskończony

(52) $$(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)\ldots(1 + w_n)\ldots$$

jest zbieżny (na mocy tylko co udowodnionego twierdzenia).

Oznaczmy jak poprzednio,

$$a_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_{n+1}) u_n = P_n - P_{n-1};$$

oznaczmyż, podobnież:

$$b_n = (1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)\ldots(1 + w_{n-1}) w_n = \Pi_n - \Pi_{n-1},$$

gdzie P_n i Π_n oznaczają iloczyny częściowe iloczynów nieskończonych (50) i (52).

Szereg Σb_n jest zbieżny, gdyż jego sumy częściowe są równe iloczynom częściowym iloczynu zbieżnego (52). Ponieważ $w_n = |u_n|$, więc, oczywiście, $|a_n| \leqslant b_n$, a wskutek tego szereg Σa_n jest także zbieżny. Lecz sumy częściowe szeregu Σa_n są równe iloczynom częściowym iloczynu nieskończonego (50); ze zbieżności szeregu Σa_n wynika więc zbieżność iloczynu nieskończonego (50).

Szeregi bezwzględnie zbieżne mają własności najbardziej zbliżone do własności sumy skończonej liczby składników; podobnież, iloczyny nieskończone bezwzględnie zbieżne posiadają wiele własności takich samych, jak iloczyny skończonej liczby czynników.

Z pośród tych własności zajmiemy się dwoma, mianowicie: 1) iloczyn nie zależy od porządku czynników; 2) iloczyn równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników równa się zeru.

Udowodnimy naprzód, że zachodzi własność następująca:

Jeżeli iloczyn nieskończony (50) jest bezwzględnie zbieżny i jeśli ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią, to można dobrać do ε taki wskaźnik n_o, że iloczyn ilukolwiek czynników kształtu $1 + u_n$, przy $n > n_o$, różni się od jedności mniej niż o ε, t. j. że

$$|(1 + u_{n_1})(1 + u_{n_2})\ldots(1 + u_{n_k}) - 1| < \varepsilon.$$

Dowód jest następujący:

$$(1+u_{n_1})(1+u_{n_2})\dots(1+u_{n_k})-1=\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_k,$$

gdzie σ_1 oznacza sumę liczb $u_{n_1}, u_{n_2},\dots,u_{n_k}$; σ_2 sumę wszystkich iloczynów tych liczb po dwa; σ_3 sumę wszystkich iloczynów tychże liczb po trzy i t. d. Oznaczmy, jak poprzednio, $w_n=|u_n|$; w takim razie

$$(1+w_{n_1})(1+w_{n_2})\dots(1+w_{n_k})-1=\sigma'_1+\sigma'_2+\dots+\sigma'_k,$$

gdzie $\sigma'_1, \sigma'_2,\dots,\sigma'_k$ są utworzone przy pomocy liczb w_n w ten sam sposób, w jaki $\sigma_1, \sigma_2,\dots\sigma_k$ utworzone są z liczb u_n. Stąd $|\sigma_1|\leqslant\sigma'_1$, $|\sigma_2|\leqslant\sigma'_2,\dots,|\sigma_k|\leqslant\sigma'_k$; a więc

$$|\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_k|\leqslant\sigma'_1+\sigma'_2+\dots\sigma'_k, \text{ czyli}$$

$$|(1+u_{n_1})(1+u_{n_2})\dots(1+u_{n_k})-1|\leqslant(1+w_{n_1})(1+w_{n_2})\dots(1+w_{n_k})-1;$$

lecz

$$(1+w_{n_1})(1+w_{n_2})\dots(1+w_{n_k})-1=\sigma'_1+\sigma'_2+\dots+\sigma'_k<\sigma'_1+ +\frac{(\sigma'_1)^2}{2!}+\dots+\frac{(\sigma'_1)^k}{k!},$$

stąd

$$(53)\quad |(1+u_{n_1})(1+u_{n_2})\dots(1+u_{n_k})-1|<\sigma'_1+\frac{(\sigma'_1)^2}{2!}+\dots+\frac{(\sigma'_1)^k}{k!},$$

gdzie

$$(54)\qquad \sigma'_1=w_{n_1}+w_{n_2}+\dots+w_{n_k}$$

Ponieważ szereg (51) jest z założenia zbieżny, więc każdej liczbie $\varepsilon>0$ podporządkować można taki wskaźnik n_0, by

$$w_n+w_{n+1}+w_{n+2}+\dots+w_{n+p}\leqslant\varepsilon$$

dla każdego p, skoro tylko $n>n_0$; stąd wynika, iż

$$(55)\qquad \sigma'_1<\varepsilon$$

jeżeli w (54) wskaźniki $n_1, n_2,\dots,n_k$ są wszystkie większe od n_0.

Liczbę ε wybieramy mniejszą od $\frac{1}{2}$; w takim razie, na mocy (55),

$$\sigma'_1 + \frac{(\sigma'_1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\sigma'_1)^k}{k!} < \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^k + \ldots < 2\varepsilon,$$

a więc z (53) wynika, iż

$$|(1+u_{n_1})(1+u_{n_2})(1+u_{n_3})\ldots(1+u_{n_k})-1| < 2\varepsilon,$$

co trzeba było wykazać.

Niech P oznacza wartość iloczynu nieskończonego bezwzględnie zbieżnego (50).

Jeżeli żaden z czynników $1+u_n$ tego iloczynu nie równa się zeru, to $P \neq 0$.

Takie jest twierdzenie, które teraz udowodnimy. Niech ε i n_0 mają te same znaczenie, które ustaliliśmy przed chwilą. Iloczyn P napiszmy w postaci

$$P = P_n \,.\, E_n, \quad \text{gdzie } n > n_0;$$

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n); \quad E_n = (1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p})\ldots$$

P_n nie równa się zeru, gdyż jest iloczynem skończonej liczby n czynników, z których żaden, na mocy założenia, nie równa się zeru.

$$E_n = \lim_{p \to \infty} E_{n,p}$$

gdzie $\quad E_{n,p} = (1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p});$

otóż

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p}) > 1-\varepsilon > \tfrac{1}{2}, \text{ czyli } E_{n,p} > \tfrac{1}{2},$$

gdzie p dowolne, a n ma wartość ustaloną poprzednio; stąd

$$E_n = \lim_{p \to \infty} E_{n,p} \geqslant \tfrac{1}{2};$$

czynnik E_n nie może się równać zeru, gdyż jest $\geqslant \frac{1}{2}$.

Tak więc P jest iloczynem dwóch liczb P_n i E_n, z których żadna, jak wykazaliśmy, nie może się równać zeru. A więc $P \neq 0$, co trzeba było udowodnić.

Udowodnimy teraz, że wartość iloczynu nieskończonego bezwzględnie zbieżnego (50) nie zmieni się ze zmianą porządku czynników. Przypuśćmy więc, że iloczyn

(56) $\qquad (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\ldots$

utworzony jest z tych samych czynników, co iloczyn (50) w innem uporządkowaniu, przyczem nadajemy terminowi „składa się z tych samych czynników, tylko w innem uporządkowaniu“ znaczenie, które ustaliliśmy poprzednio przy szeregach (l. 53). Niech P_n oznacza iloczyn częściowy iloczynu (50), a Π_n iloczyn częściowy iloczynu (56). Niech $\varepsilon < \frac{1}{2}$ oznacza liczbę dowolnie małą, a n ma wartość większą od n_0, gdzie n_0 jest liczbą dopasowaną do ε, jak poprzednio. Niech m oznacza liczbę (większą od n) taką, by iloczyn Π_m zawierał wszystkie te czynniki, które wchodzą w skład iloczynu P_n; wtedy, oczywiście

$$\frac{\Pi_m}{P_n} = (1 + u_{n_1})(1 + u_{n_2}) \ldots (1 + u_{n_k}),$$

gdzie $1 + u_{n_1}, 1 + u_{n_2}, \ldots, 1 + u_{n_k}$, oznaczają czynniki, które wchodzą w skład Π_m, a nie są zawarte w P_n; jasna rzecz, że $n_1, n_2, \ldots, n_k$ są to wszystko liczby większe od n, a więc i od n_0. Z tego powodu, jak widzieliśmy, zachodzi nierówność

$$\left| \frac{\Pi_m}{P_k} - 1 \right| < \varepsilon,$$

czyli

$$1 - \varepsilon < \frac{\Pi_m}{P_n} < 1 + \varepsilon,$$

przyczem, gdy ε dąży do zera, m i n dążą do nieskończoności, o ile zacząwszy od pewnego miejsca wszystkie u_n nie równają się zeru. Stąd wniosek, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Pi_m}{P_n} = \frac{\Pi}{P} = 1,$$

czyli $\Pi = P$, co trzeba było wykazać.

Przykład. Iloczyn nieskończony, którego czynnik $v_n = \frac{4n^2 - 1}{4n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny, gdyż w tym przy-

padku $u_n = -\frac{1}{4n^2}$, a szereg $\Sigma \frac{1}{4n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny. Zobaczymy później, że wartość tego iloczynu jest $\frac{2}{\pi}$.

60. *Wyznaczniki nieskończone.*

Oznaczmy przez D_n wyznacznik następujący, rzędu n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & 1+a_{nn} \end{vmatrix}$$

którego wyrazy utworzone są przy pomocy wyrazów ciągu podwójnego

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} & a_{13}, & \ldots, & a_{1n}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n}, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3n}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \ldots, & a_{mn}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Wyznacznikiem rzędu nieskończonego nazywamy granicę $\lim_{n \to \infty} D_n$, o ile takowa istnieje.

Twierdzenie. Jeżeli szereg podwójny $\Sigma\Sigma a_{mn}$, utworzony z wyrazów wzmiankowanego ciągu podwójnego jest bezwzględnie zbieżny, to wyznacznik nieskończony, odpowiadający temu ciągowi jest zbieżny.

Założenie: Szereg podwójny $\Sigma\Sigma|a_{mn}|$ jest zbieżny; teza: D_n dąży do granicy, gdy $n \to \infty$.

Oznaczmy przez P_{n^2} iloczyn

$$(1+\alpha_{11})(1+\alpha_{12})\ldots(1+\alpha_{1n})(1+\alpha_{21})(1+{}_{22})(1+\alpha_{23})\ldots$$
$$\ldots(1+\alpha_{2n})(1+\alpha_{31})(1+\alpha_{32})(1+\alpha_{33})\ldots(1+\alpha_{3n})\ldots$$
$$\ldots(1+\alpha_{n1})(1+\alpha_{n2})\ldots(1+\alpha_{nn}),$$

gdzie $\alpha_{ik} = |a_{ik}|$; gdy $n \to \infty$, P_{n^2} dąży do granicy, ponie-

waż na mocy założenia szereg $\Sigma\Sigma\alpha_{mn}$ jest zbieżny. Łatwo sprawdzić, iż

$$|D_n| < P_{n^2},$$

jeżeli bowiem rozwiniemy wyznacznik D_n i iloczyn P_{n^2} na sumę składników, to okaże się, iż każdemu składnikowi, wchodzącemu w skład D_n odpowiada równy mu co do wartości bezwzględny składnik w rozwinięciu iloczynu P_{n^2}, lecz oprócz tych wyrazów są w P_{n^2} jeszcze i inne składniki, a ponieważ wszystkie wyrazy w P_{n^2} są dodatnie, więc stąd odrazu wynika wzmiankowana nierówność.

Dla tej samej przyczyny

$$|D_{n+p} - D_n| < P_{(n+p)^2} - P_{n^2};$$

moduł każdego składnika w rozwinięciu różnicy $D_{n+p} - D_n$ jest składnikiem różnicy $P_{(n+p)^2} - P_{n^2}$, przyczem ta ostatnia różnica zawiera oprócz tego jeszcze inne składniki dodatnie.

Ponieważ P_{n^2} dąży do granicy, więc do każdej liczby dodatniej ε można dobrać wskaźnik n_0 taki, że skoro tylko $n > n_0$, to $P_{(n+p)^2} - P_{n^2} < \varepsilon$, dla dowolnej wartości liczby p; a więc $n > n_0$ pociąga także nierówność

$$|D_{n+p} - D_n| < \varepsilon;$$

powołując się na ogólną zasadę zbieżności, wysnuwamy stąd, iż ciąg $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$ jest zbieżny, co trzeba było udowodnić.

Ćwiczenia i zadania.

1. Udowodnić za pomocą przekroju istnienie pierwiastka dodatniego równania $x^3 + x^2 = a$, gdzie $a > 0$.

2. Średnia arytmetyczno-geometryczna.

Niech a i b oznaczają dwie liczby dodatnie, przyczem $a < b$.

$a_1 = \frac{a+b}{2}$ jest średnia arytmetyczna,

$b_1 = \sqrt{ab}$ jest średnia geometryczna tych liczb.

Tworzymy następujące dwa ciągi

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots$$
$$b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \ldots,$$

gdzie $$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},\quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}; \ldots;$$

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n);\quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}; \ldots$$

Udowodnić, że pierwszy ciąg jest rosnący, a drugi malejący, że każda liczba pierwszego ciągu jest mniejsza od każdej liczby drugiego ciągu i że dążą do wspólnej granicy, (która się nazywa średnia arytmetyczno-geometryczna). Podać konstrukcję geometryczną ciągu tych odcinków.

Wskazówka: Udawadniamy naprzód, iż $a < a_1 < b$, $a < b_1 < b$, $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, czyli $a_1 < b_1$, a więc $a < a_1 < b_1 < b$. Stąd wynika $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots$ $\ldots < b_2 < b_1 < b$; a więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \to \beta$. Lecz $2b_{n+1} = a_n + b_n$, dalej $2\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, czyli $2\beta = \alpha + \beta$, $\beta = \alpha$; $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\} =$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2$; $\frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} < \frac{1}{2}$; więc $b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$.

3. Średnia arytmetyczno-harmoniczna.

Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ jest harmoniczny, jeżeli ciąg liczb odwrotnych, t. j. ciąg

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$$

jest postępem arytmetycznym.

Wtedy $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{a_2};\quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} = \frac{2}{a_3}; \ldots$$

Niech $0<a<b$. Udowodnić, że średnia harmoniczna liczb a i b jest mniejsza od ich średnio geometrycznej.

W rzeczy samej

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\sqrt{ab}}{a+b}>0$$

Tworzymy dwa ciągi:

$$a,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$$
$$b,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n,\ldots$$

gdzie $a_1=\frac{2ab}{a+b},\ b_1=\frac{a+b}{2};\ a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\ b_2=\frac{a_1+b_1}{2};\ldots$

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ b_{n+1}=\tfrac{1}{2}(a_n+b_n);\ldots$$

Udowodnić, że ciąg pierwszy jest rosnący, ciąg drugi malejący, że każdy wyraz pierwszego jest mniejszy od każdej liczby drugiego ciągu i że dążą do wspólnej granicy, którą nazywamy średnią arytmetycznie-harmoniczną.

4. Średnia geometryczno-harmoniczna.

Rozwiązać takie same zadanie dla ciągów, określonych przez wzory: $a_1=\frac{2ab}{a+b},\ b_1=\sqrt{ab};$

$$a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\ b_2=\sqrt{a_1b_1};\ldots;\ a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n};\ldots$$

5. Zbadać ciągi, określone w następujący sposób:

1) $a_1=\sqrt{ab},\ b_1=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\ a_2=\sqrt{a_1b_1},\ b_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1^2+b_1^2)};\ldots$

$$\ldots;\ a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ b_{n+1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)};\ldots$$

2) $a_n=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)};\ a_2=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1),$

$$b_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1^2+b_1^2)};\ldots;\ a_{n+1}=\tfrac{1}{2}(a_n+b_n),\ b_{n+1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)};\ldots$$

Wskazówka. Do pierwszego pytania: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\sqrt{ab};$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b;\quad b^2_{n+1}-a^2_{n+1}=\tfrac{1}{2}(b_n-a_n)^2;$$

$$\frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{b_n-a_n}=\tfrac{1}{2}\,\frac{b_n-a_n}{b_{n+1}+a_{n+1}};$$

$$(b_{n+1}+a_{n+1})^2>b^2_{n+1}+a^2_{n+1}=\frac{(a_n+b_n)^2}{2};$$

$$b_{n+1}+a_{n+1}>\frac{1}{\sqrt{2}}(a_n+b_n);\quad \frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{b_n-a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$b_n-a_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(b-a).$$

Do drugiego pytania.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)}>\frac{a+b}{2};\quad b^2_{n+1}-a^2_{n+1}=\frac{(b_n-a_n)^2}{4};$$

$$\frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{b_n-a_n}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b_n-a_n}{b_{n+1}+a_{n+1}}<\tfrac{1}{4}\,\frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}<\tfrac{1}{4},$$

gdyż $b_{n+1}+a_{n+1}>a_n+b_n;\ b_n-a_n<\frac{1}{4^n}(b-a).$

6. Dany jest ciąg Fibonacci'ego:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots,\ a_n,\ldots,$$

który jest określony przez: $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$;

Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$, nie znajdując wartości a_n w zależności od wskaźnika n. Udowodnić, że: $a_{n-1}a_{n+1}-a^2_n=(-1)^{n+1}$; następnie, że: $a_n=a_m a_{n-m}+a_{m-1}a_{n-m-1}$, gdzie $m<n$; $a_{2n}=a^2_n+a^2_{n-1}$.

Udowodnić wreszcie, że $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

7. Znaleźć granicę ciągu $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,\ldots$, jeżeli $u_1=a,\ u_2=b,\ldots,\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}),\ldots$

8. Znaleźć granicę ciągu $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,\ldots$, jeżeli $u_n=\frac{2^n-1}{2^{n+1}+1}$.

9 Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$,

jeżeli $10u_{n+1}+u_{n-1}=3u_n$; $u_1=10$, $u_2=3$; $u_1=a$, $u_2=b$.

10. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$,

jeżeli $u_1{}^2=a,\ldots, u^2_{n+1}=u_n+a$.

11. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$,

jeżeli $u_n=\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots.+n^p}{n^{p+1}}$.

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{p+1}$, gdy $p>-1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$, gdy $p<-1$.

12. Czy ciąg $u_1, u_2,\ldots, u_n,\ldots$ jest zbieżny;

$$u_n=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}-\lg n.$$

13. Przy jakich wartościach zmiennej x szereg

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\ldots+\frac{2^p}{x^{2^p}+1}+\ldots.$$

jest zbieżny i kiedy jest rozbieżny?

14. Niech s_p oznacza sumę częściową p wyrazów szeregu harmonicznego. Zbadać zbieżność szeregu

$$\frac{x}{s_1}+\frac{x^2}{2s_2}+\frac{x^3}{3s_3}+\ldots+\frac{x^p}{ps_p}+\ldots,$$

15. Zbadać zbieżność szeregu

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_p+\ldots$$

gdy $u_p=\sin^2\left(2p+\frac{a}{p}\right)\pi$;

gdy $u_p=\frac{1}{\sin px\,.\,\sin(p+1)x}$;

gdy $u_p=x^p\sin p\alpha$;

gdy $u_p=\sin\left(p+\frac{a}{p}\right)\pi$;

gdy $u_p=x^p\sin(\sqrt{p}\pi)$

gdy $u_p = \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^p)}$;

gdy $u_p = \operatorname{Arctg} \frac{2x}{x^2 + p(p+2)}$;

gdy $u_p = \frac{1}{2^p} \operatorname{tg} \frac{x}{2^p}$;

gdy $u_p = \sin^k \left(\frac{x}{a+p}\right)$.

16. Znaleźć $\lim_{n \to \infty} u_n$, gdzie $u_n^2 = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}$

17. Zbadać ciąg $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p, \dots$,

gdzie $u_p = \sin \frac{2\pi p^2 + 1}{p}$;

gdzie $u_p = \sin \left(\frac{p+1}{\sqrt{p}} \pi\right)$;

gdzie $u_p = \sin \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{p^2 + ap}\right)$;

gdzie $u_p = \sin \left\{(\sqrt{p+a} - \sqrt{p})\pi\right\}$; $a > 0$

gdzie $u_p = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2p+1} \sqrt{p^2 + a}\right)$;

gdzie $u_p = \sin \left\{(\sqrt{p+a} + \sqrt{p}) \frac{\pi}{4}\right\}$; $a > 0$.

O każdym z tych ciągów powiedzieć: czy jest ograniczony, jakie są jego punkty skupienia, jaka jest największa z granic; który z tych ciągów jest zbieżny.

18. Udowodnić, że jeżeli szereg $u_1 + u_2 + \dots + u_p + \dots$, gdzie $u_p > 0$, jest zbieżny, to jest zbieżny również szereg $u_1^2 + u_2^2 + \dots$ $\dots + u_p^2 + \dots$, a także i szereg $\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \dots$ $\dots + \frac{u_n}{1+u_n} + \dots$

19. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu $u_1^2 + u_2^2 + \dots$ $\dots + u_p^2 + \dots$ wynika zbieżność szeregu $\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} \dots + \dots \frac{u_p}{p} + \dots$

20. Zbadać zbieżność ciągu $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$, gdzie $u_1 = \sin x, \ldots, u_{p+1} = \sin u_p$.*

21. Udowodnić, że:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_pb_p)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_p^2)$$
$$- \{(a_1b_2 - b_2a_1)^2 + (a_1b_3 - b_3a_1)^2 + \ldots + (a_ib_j - a_jb_i)^2 + \ldots\};$$

wyprowadzić stąd nierówność Schwarza

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_pb_p)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_p^2).$$

22. Udowodnić nierówność $\dfrac{b^p - a^p}{b - a} < p b^{p-1}$ i $\dfrac{b^p - a^p}{b - a} > p a^{p-1}$, gdzie $b > a$ i $p > 0$.

23. Udowodnić nierówność $\dfrac{a^p + b^p}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p$.

24. Udowodnić nierówność

$$\frac{1}{n}(a_1^p + a_2^p + \ldots a_n^p) \geqslant \left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right\}^p.$$

25. Jeżeli mamy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_p$ i $b_1, b_2, \ldots, b_p$, spełniające warunki

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_p;$$
$$0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_p; \text{ to}$$
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)(b_1 + b_2 + \ldots + b_p) \leqslant p(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_pb_p).$$

26. Jeżeli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_p$ są wszystkie dodatnie i

$$b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_p, \text{ to}$$
$$b_1 < \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_pb_p}{a_1 + a_2 + \ldots + a_p} < b_p.$$

27. Jeżeli $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n > \ldots > 0$; $b_n \to 0$;

lecz $$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sigma_n \to \infty,$$

to $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \lim \frac{s_n}{n},$$

gdzie $$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

---

* By rozwiązać te zadanie, trzeba znać wzór na wartość średnią. Mamy $u_{p+1} - u_p = \sin u_p \sin u_{p-1} = (u_p - u_{p-1}) . \cos \xi_p$; $\lim\limits_{p\to\infty} u_p = $ $= u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_p - u_{p-1}) + \ldots$

28) Jeżeli $s_n \to g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n} = g$.

Niech $s_p = g + \eta_p$; połóżmy $\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}$;

$$\sigma_n = \frac{ng+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n} = g + \frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n}.$$

Widzimy, iż wystarczy udowodnić, że z $\eta_n \to 0$ wynika $\frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n)\to 0$. Niech p_0 oznacza liczbę całkowitą, funkcję zmiennej n, ale taką, że $p_0(n)\to\infty$, ale $\lim \frac{p_0(n)}{n} \to 0$, np. $p_0(n) = E(\sqrt{n})$; $\frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n) =$
$= \frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{p_0}) + \frac{1}{n}(\eta_{p_0+1}+\eta_{p_0+2}+\ldots\eta_n) = U_n + V_n$;
ponieważ $\lim \eta_{p_0(n)} = 0$, więc do $\varepsilon > 0$ można dobrać n_0 tak, by $n > n_0$ pociągało $|\eta_{p_0}| < \frac{1}{2}\varepsilon$;

stąd $|V_n| = \frac{1}{n}|\eta_{p_0+1}+\eta_{p_0+2}+\ldots+\eta_n| \leqslant \frac{n-p_0}{2n}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon$,

skoro tylko $n > n_0$;

dalej $|U_n| = \frac{1}{n}|\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{p_0}| < \frac{p_0(n)}{n}K$,

gdzie $K > |\eta_p|$ dla każdego p; że taka liczba K istnieje, wynika stąd, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Ponieważ $\frac{p_0(n)}{n} \to 0$, więc dla $n > m_0 \geqslant n_0$, $\frac{p_0(n)}{n}K < \frac{\varepsilon}{2}$, czyli $|U_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tak więc $|U_n|$ i $|V_n|$ „prawie" zawsze są mniejsze od $\frac{1}{2}\varepsilon$; ponieważ $\left|\frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n\right| \leqslant |U_n|+|V_n| \leqslant \varepsilon$, więc $\frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n)\to 0$, gdy $n\to\infty$, i twierdzenie nasze zostało udowodnione. Należy zwrócić uwagę, że $\sigma_n = \frac{1}{n}(s_1+s_2+\ldots+s_n)$ jest średnią arytmetyczną n kolejnych liczb naszego ciągu; jeżeli więc ciąg dąży do granicy, to jego średnie arytmetyczne zmierzają do tej samej granicy.

Łatwo sprawdzić, że twierdzenie odwrotne nie jest

prawdziwe, t. j. średnie arytmetyczne mogą zmierzać do granicy pomimo iż ciąg $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nie dąży do granicy. Wystarczy przykład następujący:

$$s_n = \tfrac{1}{2}\{1 - (-1)^n\};$$

ciąg ten nie posiada, jak wiemy granicy; tymczasem $\sigma_n = \frac{\alpha_n}{2n}$, gdzie $\alpha_n = n$ lub $n+1$, zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą czy nieparzystą. A więc $\sigma_n \to \frac{1}{2}$.

Na tej drodze możemy dać określenia granicy ciągu szersze, aniżeli dotychczasowe; jest to droga do rozszerzenia pojęcia granicy.

29. Jeżeli $a_n \to a$, $b_n \to b$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 b_1 + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = ab.$$

Niech $b_n = b + \eta_n$ wtedy $\eta_n \to 0$;

$$\frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n c_n) = \frac{1}{n} b(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$
$$+ \frac{1}{n}(a_1 \eta_n + a_2 \eta_{n-1} + \ldots + a_n \eta_1) = U_n + V_n$$

$$U_n = b\,\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to b \,.\, a,$$ ponieważ $a_n \to a$, na mocy twierdzenia, udowodnionego w poprzedniem ćwiczeniu;

$$|V_n| \leqslant A\,\frac{|\eta_1| + |\eta_2| + \ldots + |\eta_n|}{n},$$

gdzie $|a_n| < A$, bo ciąg zbieżny jest ograniczony. Ponieważ $|\eta_n| \to 0$, więc $\frac{1}{n}\{|\eta_1| + |\eta_2| + \ldots + |\eta_n|\} \to 0$ na podstawie poprzedniego ćwiczenia.

A więc $U_n \to ab$, $V_n \to 0$; stąd wynika, że

$$\frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = U_n + V_n \to ab.$$

30 Udowodnić twierdzenie Abela o mnożeniu szeregów

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;\ \sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n;$$
$$w_1 = a_1 b_1;\ w_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1;\ w_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1; \ldots$$
$$w_n = a_1 b_n + a_2 b_{n+1} + \ldots + a_n b_1;$$
$$p_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

Twierdzenie Abela polega na tem, że jeżeli

$$s_n \to s;\ \sigma_n \to \sigma;\ p_n \to p,$$

to $$p = s \cdot \sigma.$$

Przedewszystkiem możemy sprawdzić tożsamości:

$$p_n = a_1 \sigma_n + a_2 \sigma_{n-1} + \ldots + a_n \sigma_1 = b_1 s_n + b_2 s_{n-1} + \ldots + b_n s_1,$$

a dalej:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = s_1 \sigma_n + s_2 \sigma_{n-1} + s_3 \sigma_{n-2} + \ldots + s_n \sigma_1;$$

stąd $\frac{1}{n}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \frac{1}{n}(s_1 \sigma_n + s_2 \sigma_{n-1} + \ldots + s_n \sigma_1)$;

przechodząc do granicy dla $n \to \infty$, otrzymamy na podstawie twierdzeń, udowodnionych w ćwiczeniach N. 28 i N. 29.

$$p = s \cdot \sigma,$$

ponieważ $$p_n \to p;\ s_n \to s;\ \sigma_n \to \sigma.$$

31. Opierając się na poprzednich wynikach, udowodnić, że

$$\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) - \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) - \ldots.$$

32. Udowodnić, że szereg

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \ldots,$$

w którym mamy po wyrazie 1, dwa wyrazy ujemne, potem 3 dodatnie, potem 4 ujemne, potem 5 dodatnich i t. d., a wartości bezwzględne wyrazów tworzą ciąg harmoniczny, jest zbieżny. Zbadać szereg utworzony w podobny sposób z tą tylko różnicą, że grupy wyrazów o jednakowych znakach zawierają kolejno 1, 2, 4, 8, 16 i t. d. wyrazów.

33. Dowieść, że, jeżeli szereg $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_p + \ldots$ jest rozbieżny i jeżeli $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_p > \ldots > 0$,

$$\lim_{p \to \infty} \frac{u_1 + u_3 + \ldots + u_{2p-1}}{u_2 + u_4 + \ldots + u_{2p}} = 1.$$

34. Dany jest ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Zbadać iloczyn nieskończony

$$v_1 . v_2 . v_3 \dots v_n \dots,$$

gdzie $v_1 = \frac{a_2 + a_2}{2\sqrt{a_1 . a_2}}$, $v_2 = \frac{a_2 + a_3}{2\sqrt{a_2\, a_3}}, \dots, v_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2\sqrt{a_n\, a_{n+1}}}, \dots$

Zbadać zbieżność tego iloczynu nieskończonego w przypadku szczególnym,

a) gdy ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ zmierza do granicy g, t. j. gdy $a_n \to g$.

b) gdy ciąg jest postępem arytmetycznym.

c) gdy $a_n = n^2$.

35. Udowodnić, że (patrz l. 50) $\underline{g_a} \leqslant \underline{g_c} \leqslant \overline{G_c} \leqslant \overline{G_a}$.

$\overline{G_a}$ oznacza największą z granic ciągu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\overline{G_c}$ zaś oznacza największą z granic ciagu $\sqrt[n]{a_n}$; $a_n > 0$. Z określenia liczby $\overline{G_a}$ wynika, że „prawie“ zawsze $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ jest mniejsze od $\overline{G_a} + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$; inaczej, istnieje taka liczba n_0, że

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \overline{G_a} + \varepsilon; \quad \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < \overline{G_a} + \varepsilon, \quad \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < \overline{G_a} + \varepsilon, \dots$$

skąd, dla $n > n_0$,

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < (\overline{G_a} + \varepsilon)^{n - n_0}, \quad \text{czyli } a_n < a_{n_0} \frac{(\overline{G_a} + \varepsilon)^n}{(\overline{G_a} + \varepsilon)^{n_0}};$$

a więc $\sqrt[n]{a_n} < (\overline{G_a} + \varepsilon) . a_{n_0}^{\frac{1}{n}} . (\overline{G_a} + \varepsilon)^{-\frac{n_0}{n}}$, dla każdego $n > n_0$. Lecz, gdy $n \to \infty$, to

$$(\overline{G_a} + \varepsilon) . a_{n_0}^{\frac{1}{n}} . (\overline{G_a} + \varepsilon)^{-\frac{n_0}{n}} \text{ dąży do } \overline{G_a} + \varepsilon, \text{ czyli}$$

$(\overline{G_a} + \varepsilon)^{\frac{1}{n}} . (\overline{G_a} + \varepsilon)^{-\frac{n_0}{n}}$ jest „prawie“ zawsze mniejsze od $\overline{G_a} + 2\varepsilon$, a więc na zasadzie tylko co otrzymanej nierówności $\sqrt[n]{a_n}$ także jest „prawie“ zawsze mniejsze od $\overline{G_a} + 2\varepsilon$. Stąd wynika, że największa z granic ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ nie może

być większa od $\overline{G}_a + 2\varepsilon$, czyli $\overline{G}_c \leqslant G_a + 2\varepsilon$; lecz ponieważ liczba dodatnia ε jest dowolnie mała, więc $\overline{G}_c \leqslant \overline{G}_a$.

Dowód twierdzenia $g_a \leqslant g_c$ jest zupełnie podobny do poprzedniego.

36. Udowodnić bezpośrednio, że

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Udowodniliśmy (patrz l. 31), że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i granicę tego ciągu oznaczyliśmy przez e. Wprowadźmy teraz nowy ciąg

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots, \text{ gdzie}$$

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!}, \ldots, s_n 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \ldots$$

Ciąg ten również jest rosnący i ograniczony od góry, gdyż (patrz l. 31) jest zawsze $s_n < 3$; stąd wynika istnienie granicy $g = \lim s_n$. Trzeba udowodnić, że $g = e$.

Jeżeli liczby $d_1, d_2, \ldots, d_n$ są wszystkie dodatnie, to $(1 - d_1)(1 - d_2) > 1 - (d_1 + d_2)$, a stąd przez indukcję $(1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3)\ldots(1 - d_n) > 1 - (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n)$.

Niech $d_1 = \frac{1}{n}$, $d_2 = \frac{2}{n}, \ldots, d_{n-1} = \frac{n-1}{n}$; wtedy nierówności poprzednie dają:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1 - \frac{2.3}{2n};\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) < 1 - \frac{3.4}{2.n}; \ldots$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 - \frac{(n-1)n}{2.n}.$$

Utwórzmy różnicę $s_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; różnica ta jest dodatnią, bo $s_n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; z drugiej strony

$$s_n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{1}{3!}\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]<\frac{1}{2!}\cdot\frac{1.2}{2n}+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{2.3}{2n}+\dots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)n}{2n};$$

czyli $s_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2n}\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-2)!}\right\}$

albo $\quad s_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2n}\cdot s_{n-2}<\frac{1}{2n}\cdot g<\frac{3}{2n};$

lecz z nierówności $0<s_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{2n}$ wynika, gdy $n\to\infty$, przez przejście do granicy, że $\lim s_n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli, że $g=e$.

Udowodnijmy jeszcze, że $b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ jest dla każdego n liczbą większą od e. Ponieważ udowodniliśmy (patrz l. 31), że $\lim b_n=e$, wystarczy udowodnić, że ciąg b_n jest malejący. Zauważymy, że

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

$$\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{n^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),\text{ skąd}$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{2!n^2}+\frac{1}{4!n^4}+\dots+\frac{1}{(2p)!n^{2p}}\right\},$$

gdzie $p=\frac{n}{2}$, jeżeli n jest liczbą parzystą, a $p=\frac{n-1}{2}$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą. Stąd

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2!n^2}+\frac{1}{4!n^4}+\frac{1}{6!n^6}+\dots\right)<1.$$

Lecz z nierówności $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} < 1$ wynika

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

czyli $b_n < b_{n-1}$, co trzeba było wykazać.

37. Zbadać ciągi:

$$a_n = \frac{(n+1)!-2}{n!+2}; \quad a_n = \frac{\lg_e n}{\lg_e(\lg_e n+2)}; \quad a_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, \text{ gdy } n \rightarrow +\infty.$$

Lecz z nierówności $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} < 1$ wynika

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

czyli $b_n < b$

37. Zb

$a_n =$ $\frac{\sin n}{n}$;